Actividad 4: Aplicaciones de las relaciones métricas en la circunferencia

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes resuelvan problemas que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos o cuerdas en la circunferencia; por ejemplo: determinar las relaciones que se producen a partir de la intersección de dos cuerdas al interior de una circunferencia, interceptar una circunferencia y dos secantes que se cortan en un punto exterior a ella.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4: Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Actitudes

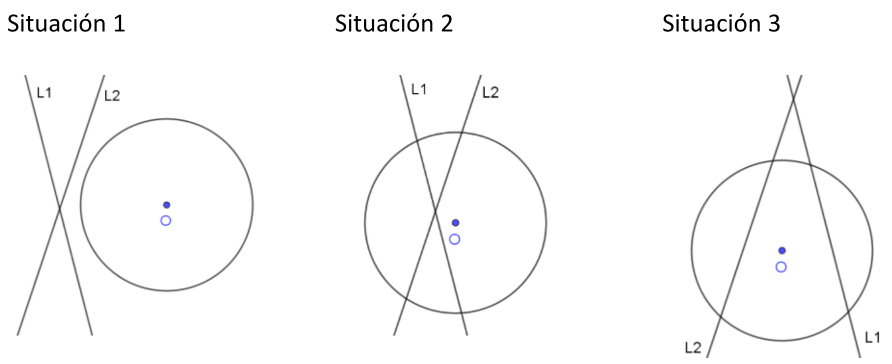
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ RELACIONES SE PUEDE ESTABLECER?

1. Observa las tres situaciones siguientes.
   a. ¿Qué relaciones se producen al intersecar dos rectas y una circunferencia?



Posición relativa entre una circunferencia y dos rectas que se cortan.

   b. ¿Existen otras situaciones posibles? Argumenta.
   c. Considera ahora las situaciones 2 y 3:

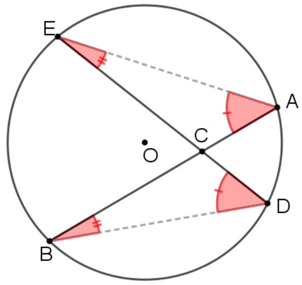


Fig. 4: Situación 2

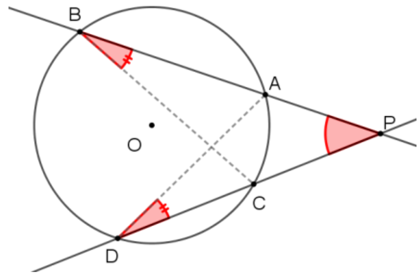


Fig. 5: Situación 3

i. ¿Qué relaciones se puede establecer? Presta atención a los ángulos y triángulos que se forman. Argumenta.

- $\angle DEA$ y $\angle DBA$
- $\angle EAB$ y $\angle EDB$
- $\angle EAB$, $\angle EDB$ y $\angle EOB$
- ΔCAE y ΔCDB

ii. ¿Qué relaciones se puede establecer? Presta atención a los ángulos y triángulos que se forman. Argumenta.

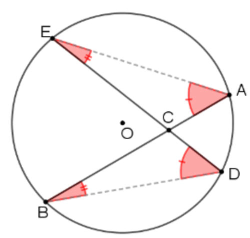
- $\angle CBA$ y $\angle CDA$
- $\angle CBA, \angle CDA\ y \angle COA$
- ΔADP y ΔCBP

d. De acuerdo a las situaciones anteriores, ¿en qué caso la semejanza de triángulos se transforma en una congruencia de triángulos?

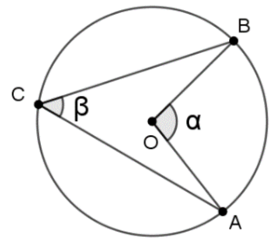
ÁNGULOS Y RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

1. Responde las siguientes preguntas:

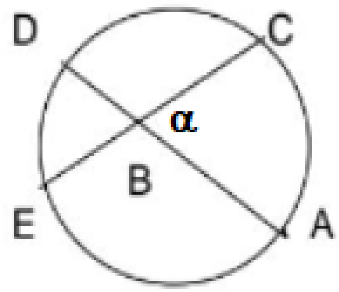
   a. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ACE$ en la figura si $AEC = 15°$ y $\angle BDC = 30°$?



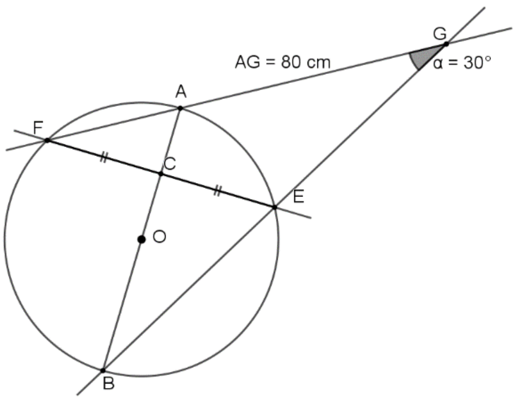
   b. ¿Cómo se justifica que la medida del ángulo del centro es igual al doble de la medida del ángulo semiinscrito?



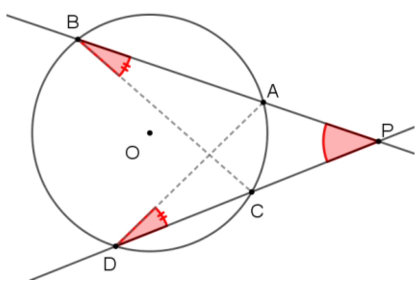
c. Demostrar que la medida de un ángulo interior en una circunferencia es igual a la semisuma de las medidas angulares de los arcos que se subtienden.



d. Demostrar otras relaciones que se pueda encontrar, como el caso de los segmentos FE, EG y EB: para que esos tres segmentos sean congruentes, es necesario que los segmentos AF y AC estén en razón 2:1.

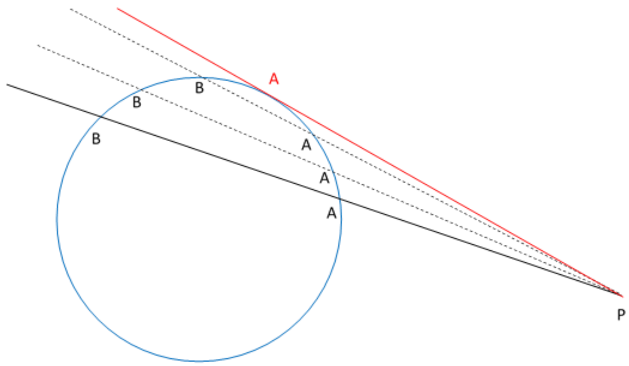


2. Observa la siguiente imagen.



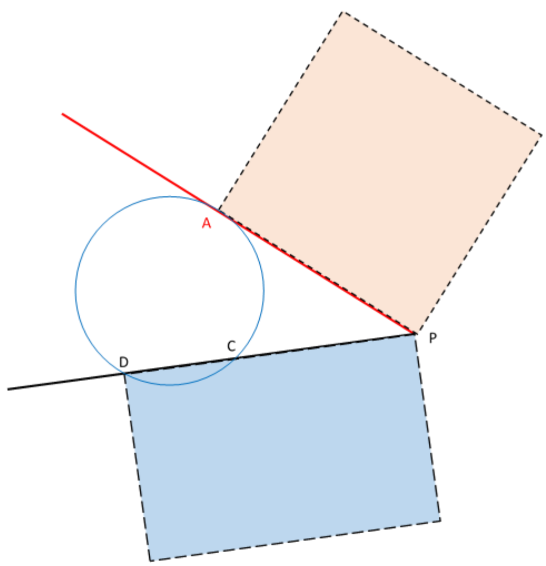
a. Explica a tu compañero la semejanza entre los triángulos ΔADP y ΔCBP.
b. ¿Se puede establecer una relación métrica en la misma secante entre los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ y los segmentos de la otra secante $\overline{PC}$y $\overline{PD}$? Muestra a tu compañero, con medidas dadas para las secantes, que esto se cumple.
c. $\Delta ADP \approx \Delta CBP$ significa que las razones entre lados del triángulo ΔADP coinciden con las razones de los lados correspondientes del triángulo ΔCBP. Explica a tu compañero las razones $\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$.
d. ¿Cómo se obtiene la siguiente ecuación: $\overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$?

3. Observa la siguiente figura junto a tu compañero y nombren los elementos que ahí aparecen.



   a. Si es posible, trabajen con alguna herramienta digital.
   b. Conjeturen qué ocurre con la ecuación $\overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$ si la secante PB se aproxima a la tangente a la circunferencia dada.
   c. ¿Qué ocurre con los puntos de intersección A y B?
   d. ¿En qué expresión algebraica se convierte el producto de los segmentos $\overline{PB} \cdot \overline{PA}$?

4. Observa ahora la siguiente figura.



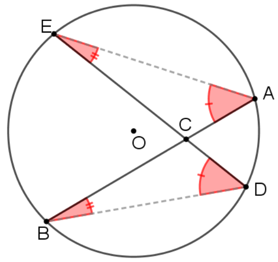
   a. Si es posible, reprodúcela de forma digital.
   b. ¿Cómo se puede interpretar geométricamente el producto de los segmentos $\overline{PD} \cdot \overline{PC}$? Discute con tu compañero de trabajo sobre las respuestas.
   c. ¿A qué corresponden las figuras sobre la secante PC y sobre la tangente PA?

5. Se quiere transformar un molde rectangular de $20cm\ x\ 30cm$ de hornear pizzetas rectangulares, en su nueva forma cuadrática que tenga la misma masa y el mismo grosor.
   a. Resuelvan el problema en cartulina o papel y en las dimensiones dadas sin cálculo alguno
   b. Resuelvan el problema de forma geométrica.
   c. ¿Qué resulta más rápido?
   d. ¿Qué estrategias con papel son transferibles al cálculo geométrico?

6. Aplicando los resultados que encontraron antes, elabora una estrategia para dibujar un segmento, cuyo largo representa la raíz cuadrada de un número natural, cuya raíz no es exacta.
   a. Describe y argumenta el procedimiento.
   b. Realiza el procedimiento para $\sqrt{24}$.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere destacar las diferentes alternativas que se puede obtener entre dos rectas que se cortan y una circunferencia. Esto es importante para que luego deduzcan relaciones métricas y angulares, a partir de la semejanza de triángulos. Los jóvenes pueden indagar acerca de otras posibilidades; por ejemplo, cuando el punto de intersección de las rectas está en la propia circunferencia, o bien cuando coincide con el centro de ella.
2. Cabe recomendarles que, para hacer sus esquemas y propuestas, usen herramientas manuales, como regla, transportados y compás, y también herramientas digitales.
3. No se pretende que apliquen de memoria las propiedades métricas; hay que incentivarlos para que las entiendan y las deduzcan a partir de la semejanza de triángulos y de ángulos congruentes que subtienden el mismo arco:



Considerando el arco AD:

$$m\angle DEA = m\angle DBA = \frac{1}{2} m\angle DOA$$

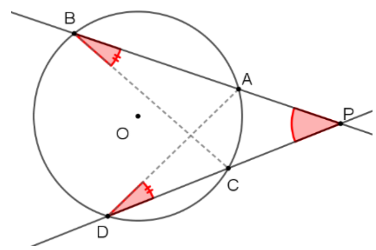
Considerando el arco EB:

$$m\angle EAB = m\angle EDB = \frac{1}{2} m\angle EOB$$

Luego,

$$\Delta CAE \sim \Delta CDB$$

Fig. Propiedades métricas cuando las rectas se intersecan al interior de la circunferencia.



Considerando el arco AC:

$$m\angle CBA = m\angle CDA = \frac{1}{2} m\angle COA$$

Luego,

$$\Delta ADP \sim \Delta CBP$$

Fig. Propiedades métricas cuando las rectas se intersecan al exterior de la circunferencia.

4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan relaciones métricas entre ángulos, arcos o cuerdas en la circunferencia para determinar medidas de objetos geométricos.
   - Justifican el uso de propiedades sobre ángulos, arcos o cuerdas para resolver un problema.
   - Explican las relaciones métricas entre ángulos, arcos o cuerdas en la circunferencia, utilizando dibujos, esquemas o proposiciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios sugeridos para estudiantes y profesores:

- Elementos del círculo y la circunferencia
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/elementos-circulo/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/yAJFB5Zr

- Ángulos en la circunferencia
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.slideshare.net/karina7060/angulos-de-la-circunferencia
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/angulos-en-la-circunferencia.html
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.portaleducativo.net/octavo-basico/758/angulos-de-la-circunferencia