Actividad 1: Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes usen la distribución de probabilidad binomial en experimentos sencillos. Lo complementan comparando con otros modelos de probabilidad –por ejemplo, el de Laplace– y diferencian claramente cuándo aplicar uno u otro. Progresan desde comprender experimentos aleatorios del tipo Bernoulli, con probabilidad de éxito y fracaso, hasta llegar al modelo de probabilidades binomial, donde interesa determinar la probabilidad de obtener exactamente un resultado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

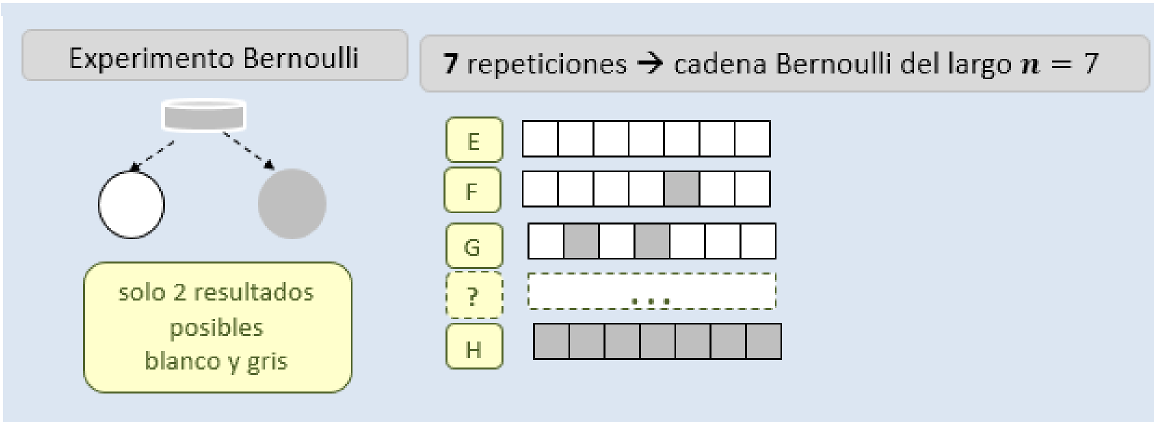
DESARROLLO

DESARROLLAR EL MODELO DE PROBABILIDADES BINOMIAL A PARTIR DE EXPERIMENTOS DEL TIPO "BERNOULLI"

Paso 1. Determinar probabilidades de repeticiones de experimentos aleatorios del tipo "Bernoulli".

La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio, en el cual se lanza una ficha de lados blanco y gris. Se supone que la ficha es "justa"; es decir, la probabilidad del evento "blanco **b**" es igual al evento "gris **g**".
Se realiza $n = 7$ repeticiones del lanzamiento y sus eventos se registran en tablas de una fila con 7 columnas, cuyas celdas se marcan en blanco o en gris.

Los eventos también se representan en una fila con 7 columnas ingresando las letras "**b**" y "**g**" o coloreando en blanco y gris según corresponda



a. Completa las siguientes 7 –tuplas ordenadas que representan los eventos "E", "F", "G" y "H".

$E = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$F = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

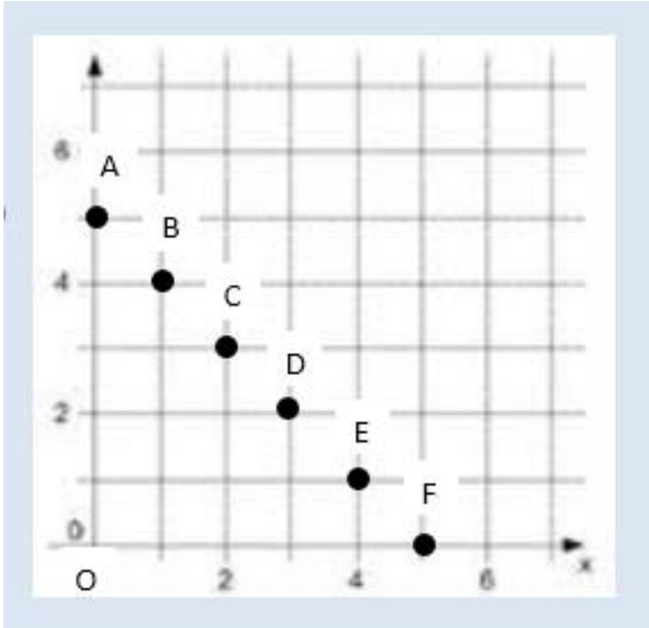
$G = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

$H = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$

b. Determina las probabilidades $P(E)$, $P(F)$, $P(G)$ y $P(H)$ de los eventos "E", "F", "G" y "H".

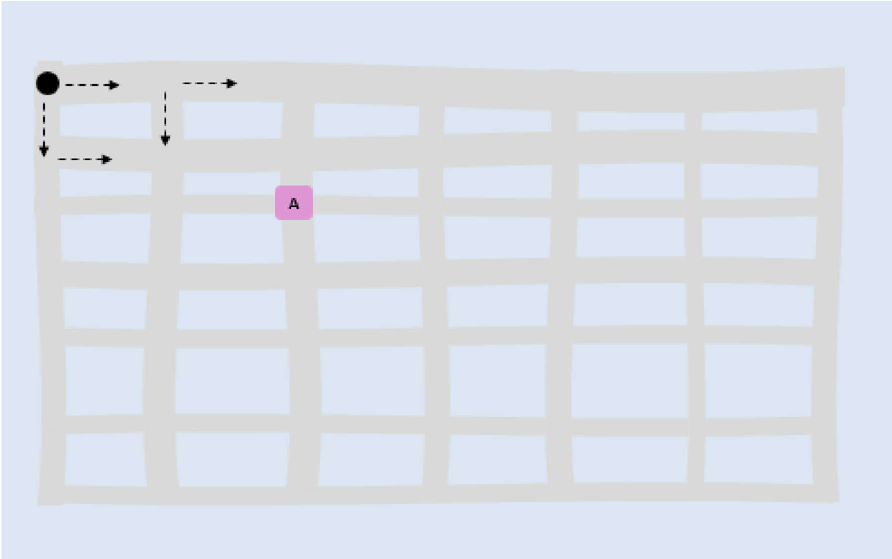
c. ¿Cuál es la probabilidad de cualquier evento compuesto de 7 lanzamientos? Argumenta la respuesta.

Paso 2. La siguiente imagen muestra un sistema de coordenadas con los puntos A, B, C, D, E, F. Partiendo del origen O, es posible moverse en las líneas de la “reja” en 5 pasos de una unidad para llegar a uno de los puntos mencionados. Se define una variable aleatoria X que representa el número de los pasos hacia la derecha.



a. Determina los valores $X = k$ para llegar a los puntos A, B, C, D, E, F.
b. Marca con diferentes colores todos los “caminos” posibles para llegar desde O a los puntos A, B, C, D, E, F.
c. Si la probabilidad de dar un paso hacia la derecha es igual que dar un paso hacia arriba, ¿cuál es la probabilidad de llegar a los puntos mencionados?
d. ¿Qué coincidencia existe con el experimento anterior? Argumenta tu respuesta.

Paso 3. En un sistema subterráneo de caminos, un grupo de rescate se encuentra en un cruce, marcado con el punto negro. El grupo intenta buscar a una persona que pasó por ese cruce y ha avanzado por cuatro cruces más en dirección al punto A.



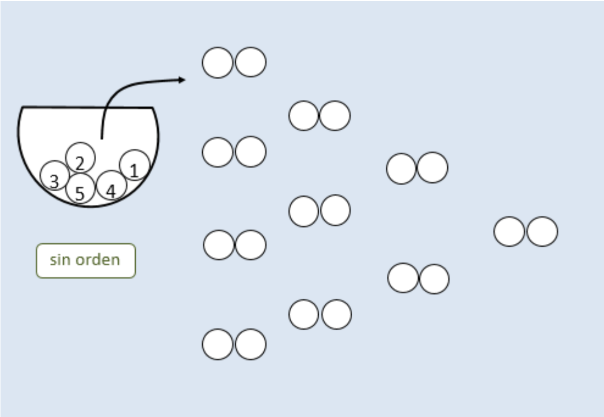
a. ¿Cuántos caminos posibles hay para encontrar a esa persona? Utiliza la siguiente tabla para determinar sistemáticamente esta cantidad de caminos. En cada columna, marca con un punto rojo una decisión de avanzar hacia la izquierda y con un punto verde la decisión de avanzar hacia la derecha, según la referencia del grupo de búsqueda hacia el objetivo A. Cada columna representa un camino posible. Por ejemplo: una alternativa podría ser: izquierda, derecha, izquierda, derecha, lo que en la tabla se traduce en:

b. Completa la tabla con otros caminos posibles. Nota: La tabla tiene más columnas o caminos de los que se necesita.

c. Expresa el número de caminos posibles mediante una potencia, utilizando la información del enunciado.

d. Describe un experimento aleatorio que tenga la misma cantidad de eventos.

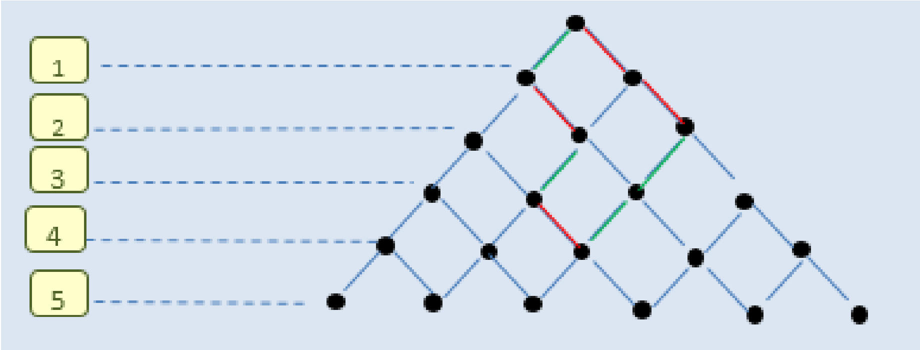
Paso 4. La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio de un “Mini-Loto”, en el cual se extrae al azar dos bolitas de la siguiente manera: se saca una bolita, se registra el número y la bolita no se devuelve a la urna (sin reposición). Después se saca la segunda bolita y se registra el número. Se forman pares ganadores, sin importar el orden; esto significa, por ejemplo, que el evento $(3, 4)$ es el mismo evento que $(4, 3)$.



a. Organiza sistemáticamente los pares de bolitas y completa el esquema anterior, de modo que en todos los pares esté el número “1” en la primera columna.
b. ¿Cuántos pares son?
c. ¿Cuántos pares resultarían, si se respetara el orden?

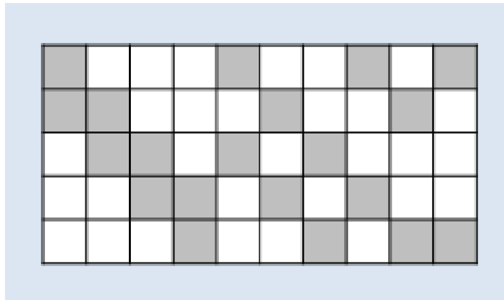
Paso 5. Imagina que, en un árbol de posibilidades de 5 niveles, se decide ir 2 veces a la derecha.

a. Marca el punto en el quinto nivel al cual se llega y determina la cantidad de caminos posibles siguiendo la regla de dos veces a la derecha.

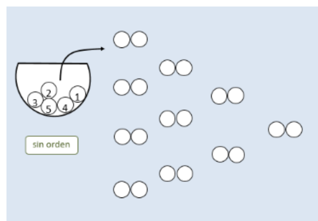


b. Siguiendo el recuadro anterior, completa el árbol de posibilidades. ¿Cuántos caminos hay para llegar al quinto nivel?

c. En la siguiente imagen, se muestra una representación en blanco y gris que indica la elección de dos cuadrados de una columna con 5. Numera los casilleros de 1 a 5 en cada columna y selecciona los números marcados en gris.



d. Compara la representación cuadricular con el ejercicio de la extracción de bolitas sin reposición. desde una urna de 5 bolitas y sin importar el orden, ¿es lo mismo? ¿por qué?



e. Si comparas la representación rectangular y el experimento de extraer dos bolitas sin reposición con el número de posibles caminos en el diagrama de árbol y la regla de ir 2 veces a la derecha ¿qué observas? ¿con que tipo de asociación entre las imágenes lo podrías explicar? (Ayuda: para llegar al punto C en el plano cartesiano se cumple la misma regla que en el ejercicio del diagrama de árbol, dos veces a la derecha).

Paso 6. Desarrollar algebraicamente los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ en el ejemplo, incluyendo todas las posibilidades de elegir 2 de 5 , $k = 2$ y $n = 5$ elementos sin reposición y sin considerar el orden. Esto implica ir 2 pasos, de un total de 5, en una de las direcciones posibles. Completa el procedimiento simbólico que se presenta en el siguiente recuadro.

cantidad de posibilidades en extraer $k = 2$ del total de $n = 5$

sin reposición

$S = 5 \cdot 4$

con orden

$\longrightarrow$

sin reposición

$Z = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} =$

sin orden: dividir por permutaciones de "k"

$Z = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} =$ $\quad \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot} =$ $\quad \dfrac{*\,!}{*\,! \cdot *\,!} =$ $\quad \dfrac{*\,!}{*\,! \cdot (* \;\; - *\;)!}$

aumentar por "3 · 2 · 1"

representar por facultades

representar por facultades de **n** y **k**

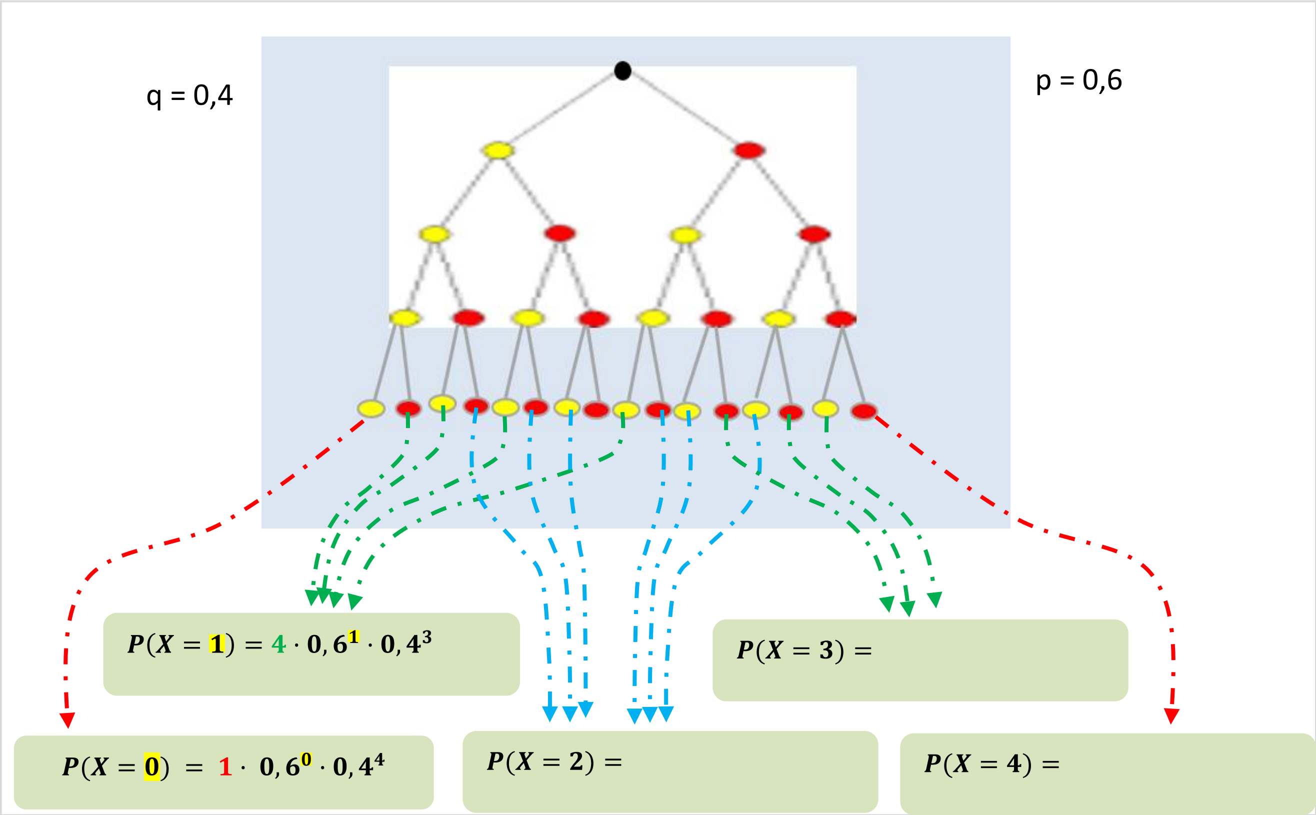
En general

$\binom{n}{k} =$

Paso 7. Desarrollar la expresión para la probabilidad P de tener k éxitos en n repeticiones de un experimento aleatorio del tipo Bernoulli. Esto se conoce como el Modelo de Probabilidades Binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

La siguiente imagen muestra un árbol que representa una situación con $n = 4$ decisiones de tomar el camino hacia la derecha (amarillo) o hacia la izquierda (rojo). La probabilidad de tomar el camino hacia la derecha es de $0{,}4$. Una variable aleatoria X representa las decisiones de tomar el camino hacia izquierda.



a. Mirando el esquema y el sistema de los caminos, completa los recuadros de la misma manera que para $P(X = 0)$ y $P(X = 1)$, pero ahora para calcular las probabilidades de $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ y $P(X = 4)$.
b. Comprueba los cálculos con el modelo de probabilidades binomial o distribución binomial para $n = 4\ y\ p = 0{,}6$.

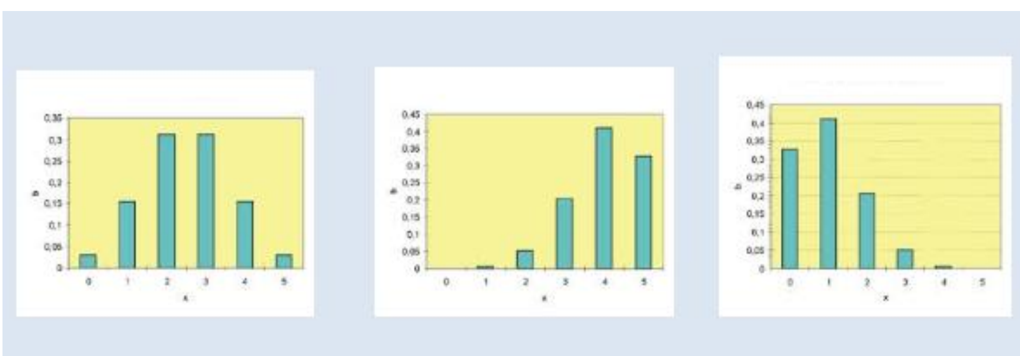
c. La siguiente imagen muestra el modelo de probabilidades binomial. Los recuadros en distintos colores representan el significado de cada parte del modelo. Une los recuadros vacíos en color con el enunciado que está en los recuadros punteados.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Cantidad de caminos en el árbol de probabilidades	Probabilidad que corresponde a un camino de **k** éxitos	Probabilidad de **k** éxitos entre **n** total	Número de los éxitos

RESOLVER PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DISTRIBUCIONES BINOMIALES

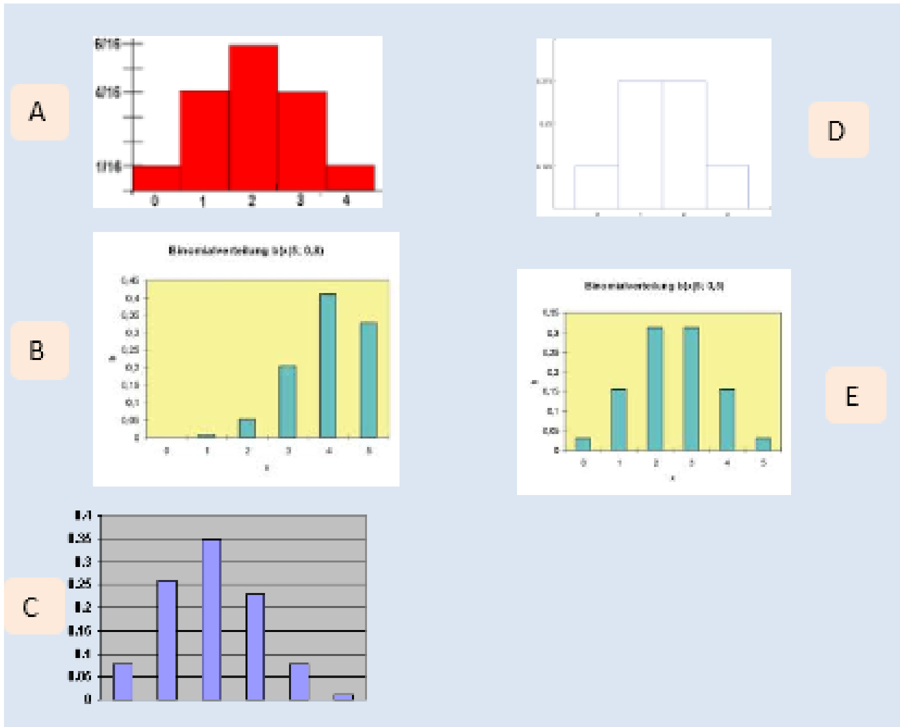
1. La siguiente imagen muestra los histogramas de tres distribuciones binomiales. La variable aleatoria X representa el número k de éxitos en un total de $n = 5$ ensayos. La probabilidad p de éxito puede tener el valor de $p = 0{,}8$, $p = 0{,}2$ y $p = 0{,}5$. Completa con la probabilidad de p correspondiente bajo los histogramas y argumenta tu decisión.



$p =$ $\quad$ $p =$ $\quad$ $p =$

a. Si se hubiera obtenido los histogramas de las mismas características mediante una "tabla de Galton", ¿cuál no mostraría inclinación alguna en sus resultados?, ¿cuál estaría más inclinada a la izquierda y cuál más a la derecha? Argumenta tu respuesta.

b. ¿Cuál de los cinco histogramas siguientes corresponde a una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}5$? Argumenta tu decisión.



2. ¿Cuáles de las siguientes situaciones se puede modelar con una distribución binomial? Argumenta tus respuestas.

a. Un tirador al arco acierta en el blanco con una probabilidad de 75%. En un certamen, tiene que realizar 6 lanzamientos. Si no alcanza el blanco, la probabilidad de acertar el próximo tiro desciende a 10%.

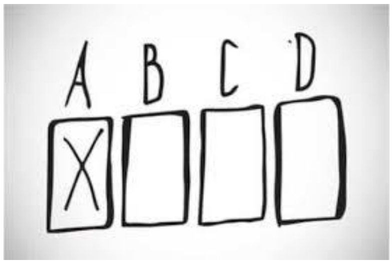
b. En los primeros meses después de entrar en vigencia la ley que obliga a llevar un chaleco de seguridad, se estima que el 60% de los autos tienen un chaleco a bordo. En la carretera se realiza un control de tránsito y se controla al azar a 50 autos.

c. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. Se quiere saber qué probabilidad hay de encontrar a un portador de daltonismo en una familia compuesta de 7 personas, mujeres y hombres.

d. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. 10 hombres acuden a la consulta de un oftalmólogo y se quiere saber la probabilidad de encontrar a un portador de daltonismo entre ellos.

e. En la final de lanzamiento de bala, cada deportista tiene 6 lanzamientos. La probabilidad de que un deportista tenga un lanzamiento válido es de 75%. Se quiere determinar la probabilidad de tener, por lo menos, 4 lanzamientos válidos.

3. Una prueba del tipo selección múltiple tiene 10 preguntas de 4 opciones, de las cuales solo una es la correcta. En las preguntas, las opciones correctas y falsas están distribuidas al azar. Se define una variable aleatoria X que corresponde al número de preguntas correctamente respondidas.



   a. ¿Por qué la situación es modelable por una distribución binomial? Argumenta.
   b. Identifica los parámetros de n, k y p. Elabora el modelo binomial que determina la probabilidad $P(X = k)$.
   c. Si se contesta todas las preguntas “al azar”, ¿cuál es la probabilidad de responder correctamente la mitad de ellas? Argumenta.
   d. Se aprueba si se responde correctamente un mínimo de 6 preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?
   e. No se puede repetir la prueba si se responde correctamente a menos de cuatro preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos sobre la probabilidad. Algunas de las preguntas o instrucciones pueden ser:
   - ¿Qué entiendes por probabilidad?
   - Describe los procedimientos o pasos para determinar la probabilidad teórica y compara con la denominada (en muchos casos) “probabilidad experimental”.
   - ¿Qué significado tiene para ti la palabra “aleatorio”? ¿Hay diferencias entre aleatorio y azaroso?
   - Piensa en toda la ropa que tienes, clasifícala en poleras, pantalones, calcetines y zapatos. Determina cuántos días podrías venir al colegio vistiendo, al menos, una prenda diferente. ¿Qué pasos tendrías que seguir para averiguar la posibilidad de encontrar, en un periodo de tiempo determinado, a dos compañeros que vengan el mismo día con una polera azul?

2. En este nivel, los alumnos ya deben haber estudiado la distribución de probabilidad binomial. Sin embargo, en estas actividades se propone un nuevo enfoque, más centrado en la elección del mejor modelo de acuerdo con el tipo de experimento indicado; por ejemplo: por qué el modelo de Laplace no sirve en este caso y qué características de este tipo de problemas se puede modelar con la distribución binomial.

3. Las actividades propuestas permiten desarrollar paso a paso el procedimiento para obtener el modelo de probabilidades binomial. Se sugiere enfatizar cada concepto y diferenciar adecuadamente el significado de un experimento de tipo "Bernoulli" hasta llegar a la distribución de probabilidades propiamente binomial. En el experimento tipo Bernoulli se tiene que:

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x} \text{ con } x = 0, 1$$

   En cambio, para el modelo de probabilidades binomial se tiene:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

   e interesa saber la probabilidad de obtener exactamente *k* éxitos en *n* lanzamientos o intentos.

4. Se propone también que usen convenientemente algunas propiedades básicas de las probabilidades, como la propiedad del complemento. No la usarán solo como ejercitación, sino como una herramienta para realizar cálculos convenientes.

5. Como se presenta una situación que debe ser validada o refutada, se potencia la habilidad de argumentar. La idea es que valoren el uso de un modelo confiable –en este caso el binomial– para fundamentar una afirmación que hicieron sin contar con el modelo.

6. Dado que uno de los objetivos de la unidad 3 es OA 3 (Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal)**,** se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los estudiantes para que evalúen el proceso de modelar en general:

Criterios	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Interpretan la situación con términos algebraicos, números o letras.	Identifican todos los datos de la situación.	Identifican algunos datos de la situación.	Escriben números o letras.
	Describen las variables y la estructura de la situación, calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Escriben palabras que están en otro contexto.

Relacionan las variables, basándose en un modelo normal o binomial y en cálculos de probabilidades.	Determinan la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Determinan parcialmente la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Escriben alguna ecuación que responde a otro problema.
Calculan probabilidades, basándose en las condiciones del problema.	Calculan las probabilidades, utilizando correctamente las propiedades y atendiendo a las condiciones del problema.	Calculan probabilidades, utilizando las propiedades.	Realizan cálculos aritméticos o algebraicos.
Interpretan los resultados, volviendo a la situación inicial.	Interpretan los resultados relacionando con la situación inicial.	Escriben los resultados.	Escriben números asociados a un problema diferente.

7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican las principales características de los modelos Bernoulli y binomial de probabilidades.
   - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Distribución Bernoulli con ejemplos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=WBSOTPM4BeY
  https://www.youtube.com/watch?v=TX2ga6fZxxM
- Expresión matemática de la distribución binomial y aplicaciones sencillas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Distribuci on_binomial.html