Actividad 2: Un argumento para demostrar el teorema de Pitágoras

PROPÓSITO

La actividad se centra en la habilidad de argumentar y comunicar, analizando el argumento del matemático griego Pappus para demostrar el teorema de Pitágoras. Los estudiantes usan un Applet u "Objeto digital interactivo" y un "Procesador geométrico" para entender los argumentos con que ese autor demuestra el teorema. Es una oportunidad para interesarse por las posibilidades que presenta la tecnología en el desarrollo del pensamiento.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4 Crear aplicaciones y realizar análisis mediante procesadores simbólicos, de geometría dinámica y de análisis estadístico.

OA d Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Actitudes

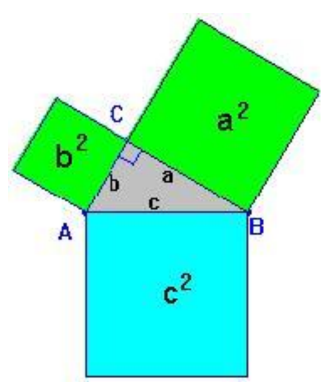
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

EL ARGUMENTO DE PAPPUS EN FORMA PICTÓRICA

Hay innumerables demostraciones del teorema. En esta oportunidad, proponemos usar un objeto digital para comprender lo que plantea y luego estudiar en detalle una argumentación acerca de su validez. Nos concentraremos en una demostración atribuida a un matemático griego Pappus. En la web se puede encontrar otras demostraciones; más adelante proponemos sitios para seguir el estudio y explorar otras de sus demostraciones y/o aplicaciones.

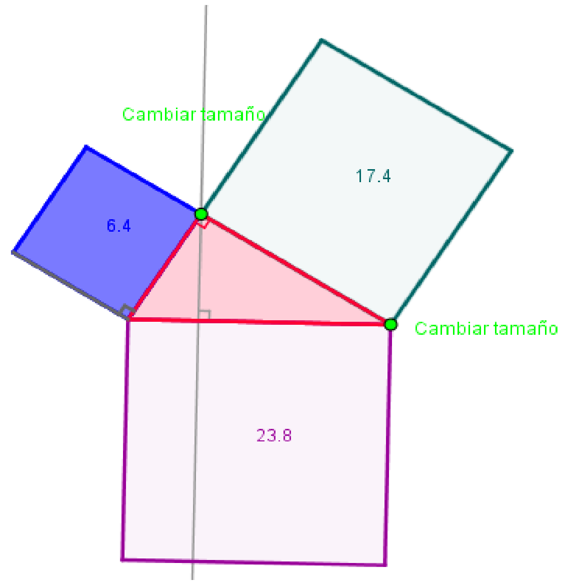


1. ¿Conozco y comprendo el teorema? ¿Cómo saber que es válido?

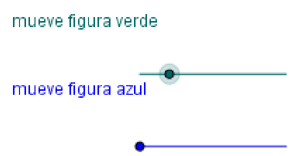
2. Busca el enunciado del teorema de Pitágoras y luego ve lo que te dice una simulación. Escribe el enunciado en palabras y su forma algebraica.

Abre el software “Pitágoras argumento de Pappus”. Hay una versión en https://www.geogebra.org/m/ejTGapQ8

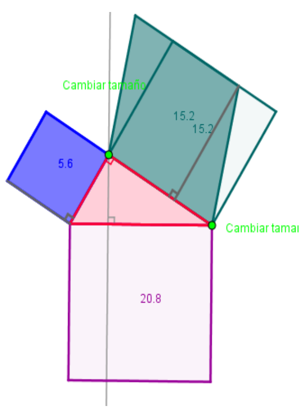
A un triángulo rectángulo se le trazó cuadrados sobre los lados.



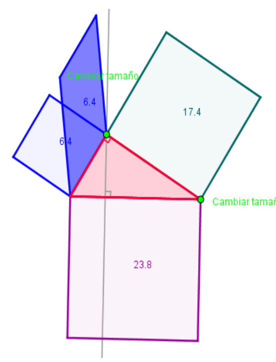
3. Observa que tiene dos controles a la izquierda. Desplaza el punto con el mouse y observa lo que sucede con la figura. Mueve los controles verde y azul, y observa.

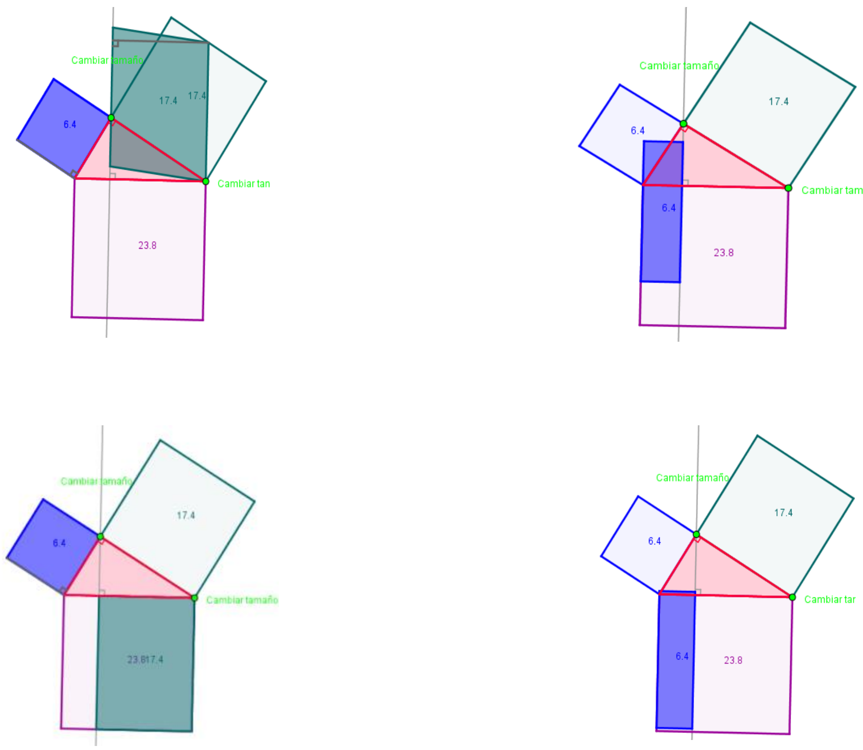


Moviendo el control verde

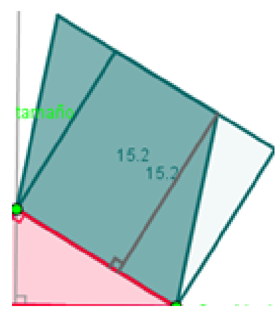


Moviendo el control azul





4. Observa la parte de la gráfica que se muestra. ¿Tienen la misma área el cuadrado y el paralelogramo? ¿Por qué?

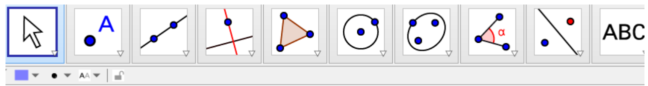


a. ¿Cómo explicarías lo que muestra la visualización?
b. Pareciera que los cuadrados de arriba, de los catetos, se “vacían” en el cuadrado inferior, el construido bajo la hipotenusa, y que lo “llenan”. ¿Cómo explicarías que el área de cada uno de los cuadrados sobre los catetos es igual a la del rectángulo formado?
c. Esta propiedad, ¿se cumple en todo triángulo rectángulo? Es decir, ¿es una propiedad general? Escribe tus conclusiones, también tus dudas o preguntas, las usaremos más adelante.

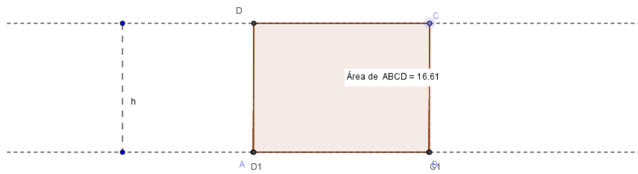
¿POR QUÉ TIENEN IGUAL ÁREA? EL ARGUMENTO DETRÁS DEL ARGUMENTO.

1. Abre GeoGebra y realiza la construcción que se describe a continuación.

Construir un rectángulo de altura "h".

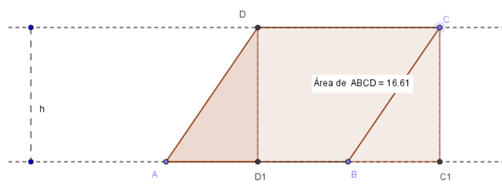


Sobre dos rectas paralelas que distan "h", hacer los trazos o segmentos AB y DC.



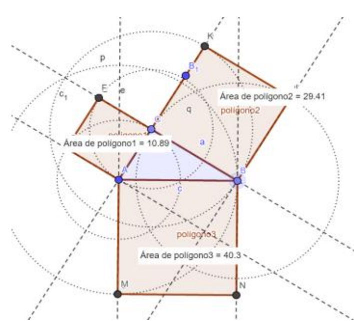
Buscar una estrategia para que, arrastrando "C", se obtenga el paralelogramo ABCD, que tiene también la altura "h".

a. ¿Cómo son las áreas del rectángulo original y el paralelogramo?
b. ¿Por qué son iguales esas áreas?
c. Revisen los argumentos que escribieron individualmente. ¿Cómo explicarían ahora que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos es igual al área del cuadrado bajo la hipotenusa?



2. Abre el software "Verificación del teorema de Pitágoras".

Representa un triángulo rectángulo ABC en el que el ángulo recto está en el vértice C y se ha construido cuadrados de lados de igual longitud que los lados del triángulo.



a. Modifica el tamaño, la forma y la ubicación de la figura, arrastrando los puntos A, C y B1. ¿Es efectivo que la suma de las áreas de los cuadrados de lados AC y BC, es igual al área del cuadrado de lado AC? Repite la acción algunas veces.

b. Compara esa situación con la que se logra simulando el "vaciado" con arena:

Alumnos y profesores del Liceo Ignacio Carrera Pinto de San Vicente de Tagua Tagua, sexta Región, hicieron una representación física del argumento de Pappus para el teorema de Pitágoras.

Al girar la estructura, la arena de ambos contenedores en los catetos llena el de la hipotenusa.

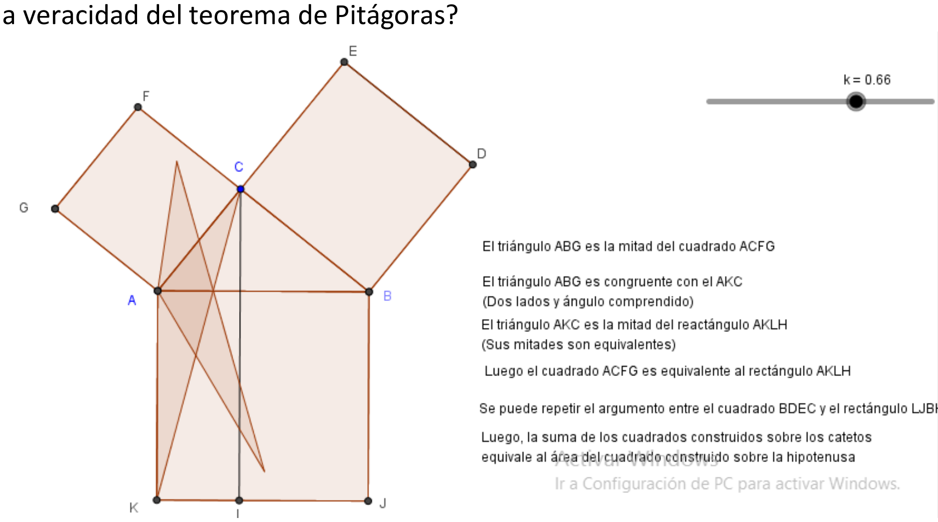
c. En tus propias palabras, ¿qué dice el teorema de Pitágoras y qué razones podrías dar para afirmar su veracidad?

EL ARGUMENTO DE EUCLIDES

1. Abre el software "Pitágoras según Euclides".
   Con el mouse, "toma" el punto B y modifica el tamaño y la forma de la figura.
   Usando el deslizador, observa lo que sucede.
   a. ¿Qué relación existe entre el área del triángulo y el cuadrado ACFG?
   b. ¿Qué relación existe entre el área del triángulo y el rectángulo formado en el cuadrado sobre la hipotenusa por el segmento CL?

2. El software grafica el argumento de Euclides para demostrar el teorema de Pitágoras. ¿Puedes enunciar el argumento?

3. ¿En qué difiere y en qué coincide el argumento de Euclides respecto del de Pappus para demostrar la veracidad del teorema de Pitágoras?



Lee el siguiente párrafo y apóyate en la imagen para responder a la pregunta 3:
"El argumento de Euclides. Trazando diagonales en los cuadrados de los catetos, obtiene un triángulo que luego transforma en otro de igual base e igual altura. Luego concluye que la mitad de uno de los cuadrados tiene la misma área que la mitad de un rectángulo en el que la recta que contiene la altura divide el cuadrado bajo la hipotenusa".

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En esta actividad se debe argumentar y comunicar. Se recomienda recordar el teorema de Pitágoras y algunas de sus aplicaciones. Use la expresión verbal y la simbólica. Conviene que los jóvenes trabajen el teorema con GeoGebra no para demostrar, sino para variar el ángulo recto y conjeturar qué pasa cuando el ángulo se vuelve agudo, y qué pasa cuando se vuelve obtuso.

2. La estrategia propuesta emplea el procesador geométrico GeoGebra. Supone que los estudiantes ya han realizado algunas construcciones con el software. En particular, deben conocer cómo trazar paralelas, definir segmentos en una recta, trazar perpendiculares y crear polígonos.

3. Al principio, se puede proyectar el software, mostrar cómo se lo acciona y preguntarles: ¿Qué muestra la simulación? ¿Son iguales las áreas? ¿Por qué? Cabe enfatizar que lo que se busca es que entiendan los argumentos y establezcan que son generales para todo triángulo rectángulo.

4. También se puede abrir el software y recordar cómo se crea un objeto, cómo se traza una paralela a una recta dada, el trazado de perpendiculares, la creación de un polígono y la forma en que se establece que un punto pertenece a una recta o segmento.

5. Se sugiere crear una construcción dinámica que muestra que el área de un triángulo equivale a la mitad del área de un paralelogramo, donde se tiene la misma base y altura.

6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan programas para verificar teoremas relacionados con la geometría.
   - Utilizan programas para obtener información visual de datos y proposiciones matemáticas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Los elementos de Euclides:
  https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo%2C_y_duodecimo_de_los_elementos_de_Euclides.pdf