Actividad 4: Aplicación de las integrales a la geometría

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan colaborativamente para comprender el método de los discos, que permite determinar el volumen de cuerpos redondos generados por la rotación de una generatriz alrededor del eje X. Utilizan una estrategia para establecer volúmenes de cuerpos, realizando cálculos manuales o digitales para apoyar, simplificar y potenciar las actividades propuestas.

Objetivos de Aprendizaje

OA5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

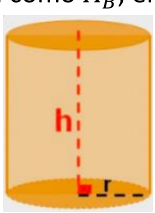
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

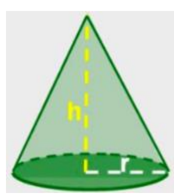
DESARROLLO

CALCULANDO VOLÚMENES DE CUERPOS REDONDOS

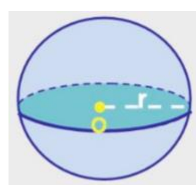
La siguiente imagen resume las fórmulas de cada volumen y, donde corresponda, se denomina el área basal como A_B, el radio como r y la altura como h:



$V = A_B \cdot h$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$



$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Ilustración 1. Cuerpos redondos[8]

[8]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR4.jpg

I. Volumen del cilindro

El cilindro es un cuerpo “redondo”, debido a que se puede generar por la rotación[9] de un rectángulo en torno a uno de sus lados, como muestra la imagen[10] adjunta.

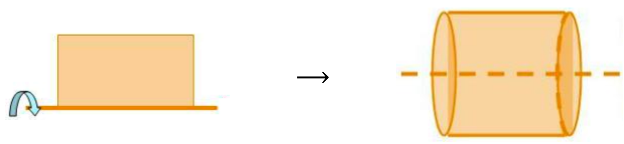
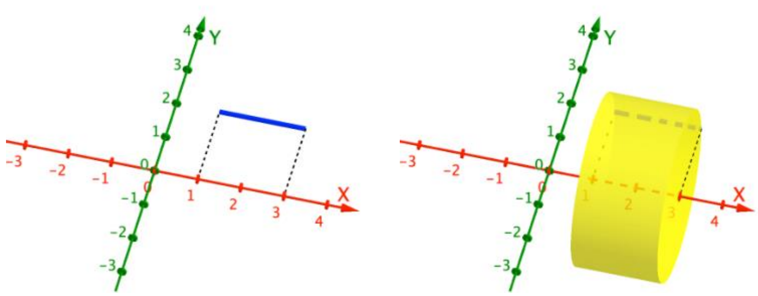


Ilustración 2. Generación de un cilindro

Observen que, en el applet sugerido a pie de página, el rectángulo y el eje tienen una orientación vertical; en cambio, en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Se puede generar el mismo cilindro si el rectángulo y el eje de rotación están horizontales o están verticales. Esto es importante para realizar los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos usar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

Considerando este modo de generar un cilindro y que daremos por cierta la fórmula del cilindro (que es área basal por altura), usaremos esta última para deducir la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, utilizando integrales (“método de los discos”).

A partir de la visualización del applet y de la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cilindro se puede generar por una rotación de un segmento de recta paralelo al eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea paralelo a dicho eje, indica que la función que rota es una recta con pendiente igual cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$ (que es una recta con pendiente $m = 0$), cuya gráfica muestra la Ilustración 3.a.



a. b.

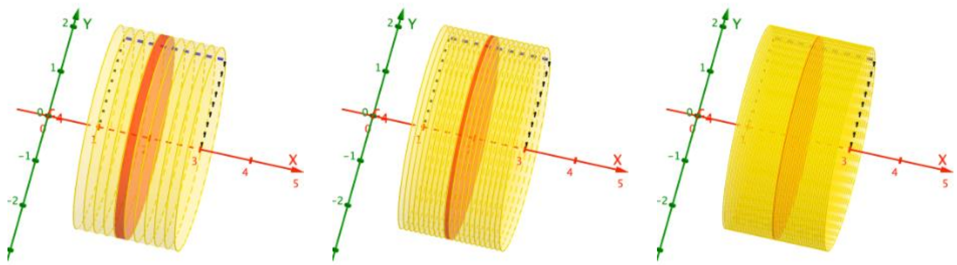
Ilustración 3.
Cilindro generado por revolución de un rectángulo.

[9] Puedes ver cómo se genera un cilindro a partir de un rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)

[10] Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

El cilindro resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X se muestra en la Ilustración 3.b. Para calcular el volumen de cuerpo, consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros infinitesimalmente delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo.

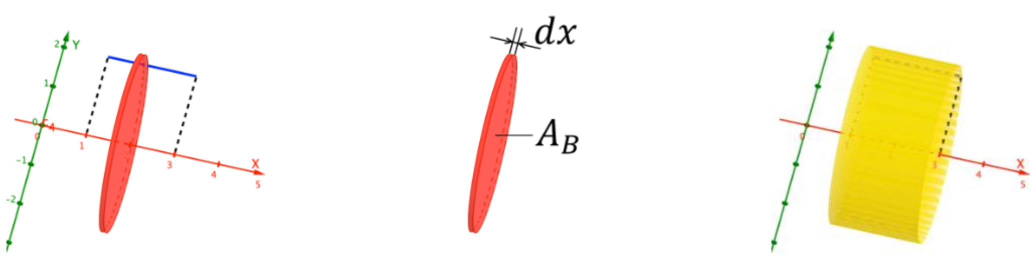
La Ilustración 4.a muestra el cuerpo compuesto por 10 cilindros, la Ilustración 4.b muestra 20 y la Ilustración 4.c muestra 50. En cada una, se ha destacado un cilindro para resaltar el aspecto que tiene:



a. b. c.

Ilustración 4.

Si se sigue el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal –que llamaremos dx–, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 5.a) tendrá un área basal $\mathrm{A_B}$ y una altura dx. Por lo tanto, cada cilindro infinitesimal tendrá un volumen igual a $A_B \cdot dx$ (Ilustración 5.b) y el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 5.c).



a.
Uno de los cilindros infinitesimales

b.
Volumen de un cilindro infinitesimal: $A_B \cdot dx$

c.
El volumen del cuerpo es $\int_1^3 A_B\, dx$

Ilustración 5.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales.

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ ___________ unidades cúbicas.

II. Volumen del cono

El cono también se llama cuerpo "redondo", debido a que se puede generar por la rotación[11] de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[12] adjunta (análogo: el cilindro se genera a partir de un rectángulo).

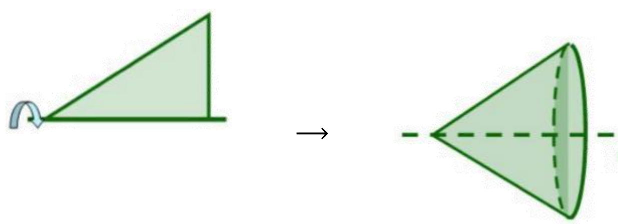


Ilustración 6. Generación de un cono

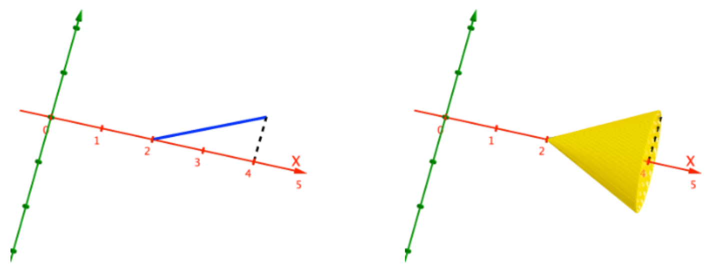
Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el triángulo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para hacer los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

[11]Puedes ver cómo se genera un cono a partir de un triángulo rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)

[12]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

Considerando este modo de generar un cono, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de un cono, utilizando integrales (“método de los discos”).

Después de visualizar el applet y la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cono se puede generar por una rotación de un segmento de recta oblicuo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea oblicuo, indica que la función que rota es una recta con pendiente distinta de cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f\colon [2,4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ (que es una recta con pendiente $m = \frac{1}{2}$) cuya gráfica muestra la Ilustración 7.a siguiente.



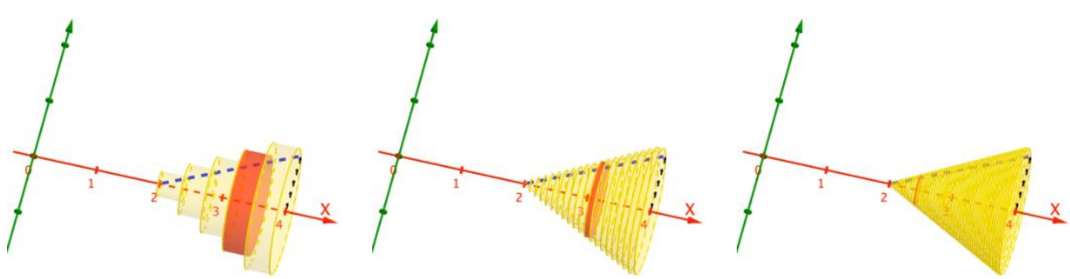
a. b.

Ilustración 7.

Cono generado por revolución de un triángulo rectángulo.

La Ilustración 7.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

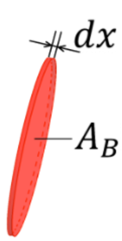
Para calcular el volumen del cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo. La ilustración 8a. muestra al cuerpo compuesto por 5 cilindros; la Ilustración 8.b. muestra 20 y la Ilustración 8.c muestra 50. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



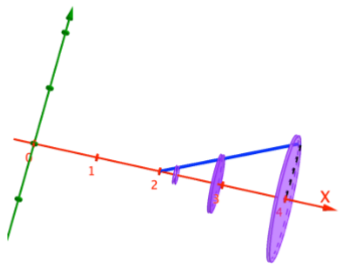
a. b. c.

Ilustración 8.

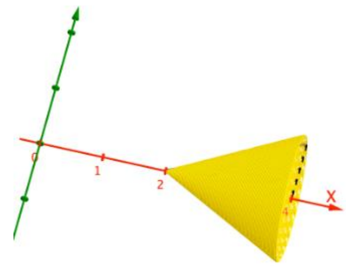
Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Así, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 9.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 9.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$, es decir, $\int_1^3 A_B \, dx$ (Ilustración 9.c).



a.
El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$



b.
Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.



c.
El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B \, dx$

Ilustración 9.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto$x$ en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado, y escríbelo a continuación:

$V =$ ___________ unidades cúbicas.

III. Volumen de la esfera

El tercer cuerpo llamado "redondo" es la esfera, que también se puede generar por la rotación[13] de un semicírculo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[14] adjunta.

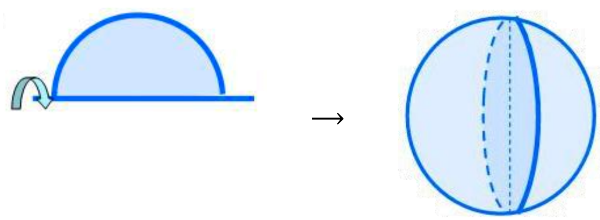
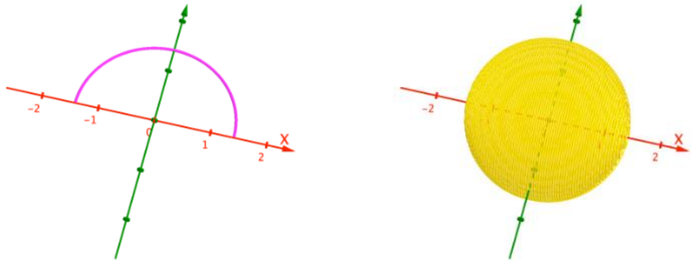


Ilustración 10. Generación de una esfera

Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el semicírculo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para calcular con integrales, pues usaremos funciones; en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar. Considerando este modo de generar una esfera, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de la esfera, utilizando integrales (método de los discos).

Después de visualizar el applet y la Ilustración 11, sabemos que se puede generar una esfera por una rotación de un semicírculo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). En este caso, la función que rota es una semicircunferencia; como ejemplo, consideraremos la función $f: [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$, cuya gráfica muestra la Ilustración 11.a.

[13]Puedes ver cómo se genera una esfera a partir de un semicírculo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción esfera)
[14]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

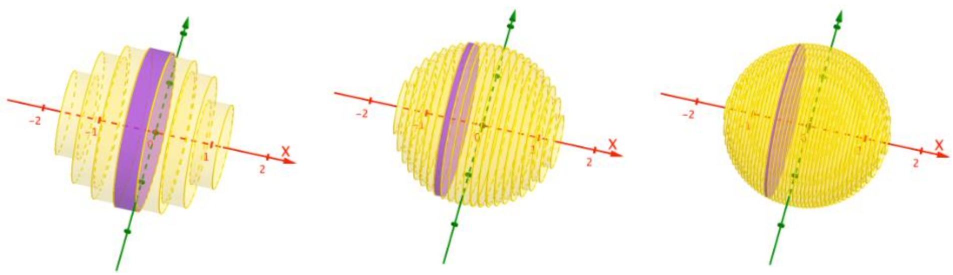


a. b.

Ilustración 11.

La Ilustración 11.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

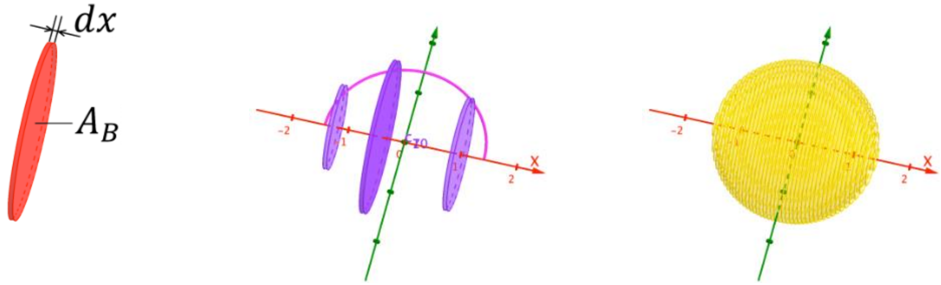
Para calcular el volumen de cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen de la esfera. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen la esfera. La Ilustración 12.a muestra al cuerpo compuesto por 10 cilindros; la Ilustración 12.b. muestra 30 y la Ilustración 12.c muestra 60. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



a. b. c.

Ilustración 12.

Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 13.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 13.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B \, dx$ (Ilustración 13.c).



a.
El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$

b.
Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.

c.
El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B \, dx$

Ilustración 13.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \; dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ ____________ unidades cúbicas.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Las actividades individuales se inician con un resumen de los tres sólidos básicos que se puede concebir como generados por revolución de elementos lineales simples (segmento paralelo al eje X, oblicuo al eje X y una semicircunferencia sobre el eje X simétrica al eje Y). Los tres ejemplos de cálculo de volumen se situaron convenientemente en el eje X para no aumentar la complejidad de entrada del cálculo del volumen que se realizará.
2. La idea que subyace a este diseño para calcular el volumen del cilindro es que el alumno se enfoque en el método de los discos para establecer el volumen de sólidos de revolución con integrales; asimismo, se busca que perciba que, como conoce el volumen del cilindro, no aumenta la complejidad del cálculo de los discos ni de la integral resultante.
3. Se recomienda que, antes de la clase o cuando empiece, los jóvenes vean el applet que visualiza la generación de cilindros, conos y esferas https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR, para que tengan una noción geométrica de la idea de rotación de un elemento lineal para generar un sólido. Esto ayudará a la primera explicación asociada al cálculo del volumen del cilindro y a familiarizarlos con las imágenes de este punto y los siguientes.
4. Se sugiere visualizar dinámicamente, en el applet http://www.curriculumnacional.cl/, cómo aumenta la cantidad de cilindros al mismo tiempo que disminuye su altura. En las imágenes asociadas, se destacó –con uno de esos cilindros de otro color– la manera en que estos cilindros se van modificando a medida que aumenta el refinamiento. Se debe tratar la segunda idea de disco de espesor infinitesimal, ya que es imposible "ver" uno de estos discos; los jóvenes debiesen captar que son discos infinitamente delgados y de allí que su altura se defina por un diferencial de x (dx). Este es un salto al límite que debiesen realizar para relacionarlo con las integrales.
5. Conviene que los ayude a formalizar la deducción del volumen de un cilindro con el método de los discos. El cambio de $b-a$ por h busca que la fórmula obtenida sea la misma que se presentó en el resumen, al inicio de esta actividad.
6. En el punto 2, se aborda el cálculo del volumen del cono. Este estudio es muy análogo al primero y se propone las mismas recomendaciones anteriores; eso sí, hay que agregar que la función generatriz del cono es una recta oblicua al eje X (en el caso del cilindro, es paralela). Esto implica que se tiene una función generadora que es lineal o lineal afín, por lo que la expresión algebraica contiene x (no es una constante, como en el caso del cilindro).
7. El procedimiento propuesto para calcular el volumen es idéntico al anterior y el cálculo es sencillo, salvo que la integral es un poco más laboriosa. Conviene que el docente acompañe a los estudiantes cuando concreten la fórmula de volumen de un cono según el método de los discos; para que entiendan ese método, recuérdeles los conceptos que articulan aquella fórmula. Si ya establecieron la fórmula del volumen del cilindro, esa formalización debiese ser más clara, aunque es algebraicamente más laboriosa.

8. En el punto 3, la función generatriz de la esfera es una semicircunferencia y su forma algebraica es del tipo $f(x) = \sqrt{p - x^2}$. Esto implica que se tiene una función generadora que es un radical, y la integral que deben obtener eleva a $f(x)$ al cuadrado, eliminando el radical y dejando una integral que, nuevamente, tiene polinomios simples integrados.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Utilizan representaciones de figuras geométricas para determinar áreas y volumen.
    - Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video que explica la generalización del método de discos alrededor del eje x: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/calculus-home/integral-calculus/ic-int-app/modal/v/generalizing-disc-method-around-x-axis
- Visualización de un sólido de revolución entre dos funciones: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/BZWTCPfd
- Visualización del método de los discos:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/fy3c4pyf
- Applet con visualización de sólidos de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/gDDvkMAm
- Ajuste de curva para generar un sólido de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PuBVTMep