

## Actividad 2: Representar y aplicar la integral definida

### PROPÓSITO

Los alumnos aplican las reglas básicas de las integrales definidas, para evitar un procedimiento extenso en el cálculo de la integral definida. Entienden las nociones de la derivada y de la integral definida, estableciendo los ejes en plano cartesiano con base en gráficos de funciones  $F$ ,  $f$  y  $f'$ . Determinan el volumen de un cilindro cuya base tiene forma de un segmento parabólico. En la segunda actividad, se espera que investiguen una situación del ámbito económico y recuperen las funciones de los costos  $C$  y de los ingresos  $I$  de una producción, por medio de integración.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 5.** Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### REPRESENTAR LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, Y CONJETURAR AL RESPECTO

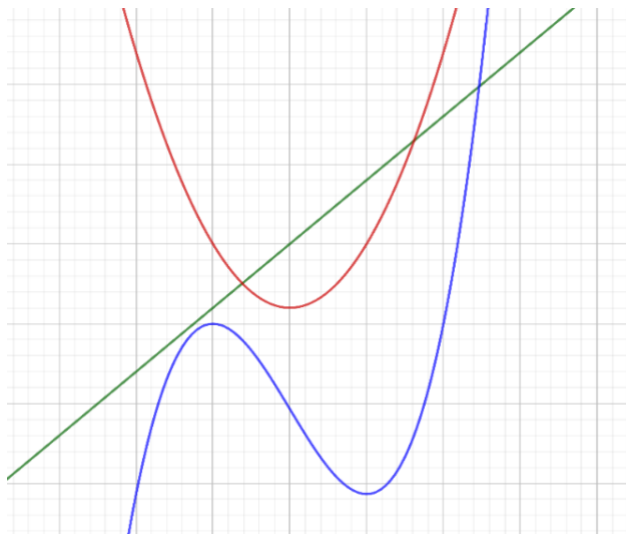
1. Establece las siguientes integrales definidas:

- $\int_{-2}^5 3x^2 dx - 15 \int_{-2}^5 \frac{1}{5}x^2 dx.$
- $\int_1^4 (2^2 + 3\sqrt{x^2 - 1}) dx - 3 \int_1^4 \sqrt{x^2 - 1} dx.$
- $\int_2^5 (x^3 - 2x^2)dx + \int_5^2 (x^3 - 2x^2)dx$

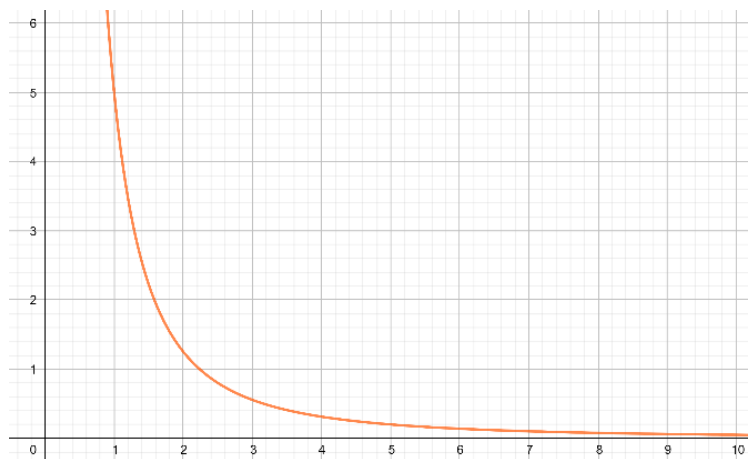
La imagen muestra los gráficos de tres funciones. Una función se llama  $f$ , otra es la derivada  $f'$  de  $f$  y la última es una posible antiderivada  $F$  de  $f$ .

¿Cuáles de los gráficos en rojo, azul o verde, representan  $f$ ,  $f'$  o  $F$  respectivamente? Da, al menos, un argumento para cada respuesta y menciona las propiedades entre función, derivada y antiderivada.

Dibuja los ejes de coordenadas y argumenta la decisión para cada eje.



La imagen muestra el gráfico de la función  $f$  con  $f(x) = \frac{5}{x^2}$ . Determina el siguiente límite del área debajo del gráfico:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{5}{x^2} dx$



## MODELAR LA CONTAMINACIÓN EN UN TÚNEL, USANDO INTEGRALES

1. El túnel de la foto tiene un corte transversal en forma de parábola con un ancho en el suelo de 8m y una altura máxima de 8m también.
  - a. Elijan adecuadamente un sistema de coordenadas y determinen la ecuación de la parábola que delimita el corte transversal del túnel. (Resultado para seguir:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ )
  - b. El túnel, con 380m de largo, es de una construcción antigua y no tiene ventilación. Para modelar la concentración de carbono de dióxido en el caso de una congestión vehicular en su interior, se requiere saber el volumen del túnel; establézcanlo.

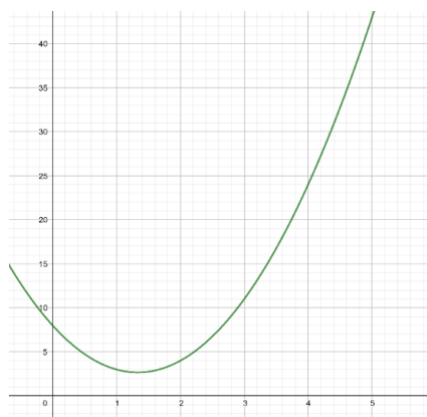


## MODELAR LOS COSTOS, USANDO INTEGRALES

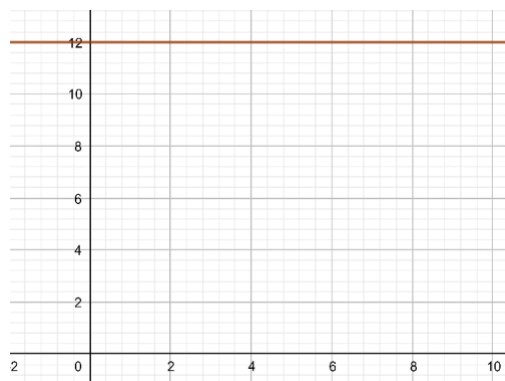
2. De la fabricación de un producto industrial se conoce la función  $C'$ , que representa la razón instantánea de los costos  $C$ , en dependencia de la cantidad  $x$  de unidades producidas.

Además, también en forma de razón instantánea, se dispone de la función  $I'$  de los ingresos  $I$  obtenidos por la venta del producto dependiente de  $x$ . La razón instantánea  $C'$  se representa por la ecuación  $C'(x) = 3x^2 - 8x + 8$  y la razón instantánea  $I'$  se representa por la ecuación  $I'(x) = 12$ . Los costos  $C_0$  fijos en la producción son de 4 (unidades monetarias).

Las imágenes muestran los gráficos de las funciones  $C'$  e  $I'$ .



Función  $C'$



Función  $I'$

- a. Determinen la función de los costos  $C$  mediante la integración, con el procedimiento  $C(x) = \int_0^x C'(t)dt$ , considerando los gastos fijos  $C_0$  mencionados.
- b. Elaboren el gráfico de la función  $C$  con herramientas digitales como GeoGebra.
- c. Determinen la función de los ingresos  $I$  mediante la integración, con el procedimiento  $I(x) = \int_0^x I'(t)dt$ .

- d. Elaboren el gráfico de la función  $I$  con herramientas digitales.
- e. Comparen los gráficos de  $C'$  e  $I'$  con los gráficos de  $C$  e  $I$  y verifiquen las relaciones que existen entre los puntos extremos y los puntos de inflexión.
- f. Considerando los gastos  $C$  y los ingresos  $I$ , ¿con qué operación entre ambas funciones se modela las ganancias  $G$  en dependencia de la cantidad producida? Argumenten y comuniquen sus respuestas.
- g. Elaboren la ecuación de la función  $G$  y grafiquen mediante herramientas tecnológicas.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda comenzar repitiendo las reglas de integración, como integral de una suma o diferencia, influencia de un factor constante o cambio del margen superior por el inferior, para establecer las integrales definidas de manera más sencilla.
2. Se sugiere representar gráficamente en el plano cartesiano, algunos “triples” de funciones  $f$ ,  $f'$  y  $F$  con toda la información, como ecuación funcional, puntos extremos y de inflexión. Conviene que usen herramientas digitales.
3. Se recomienda volver a la noción de límite y del cálculo de límites, repitiendo eventualmente el límite de una expresión fraccionaria para  $x \rightarrow \infty$ .
4. La actividad de costos tiene el mismo problema de economía que se presentó en el contexto de las derivadas. En este caso, la única diferencia que hay en la “partida” del problema es que empieza con las derivadas  $I'$  y  $C'$  de las funciones de los ingresos  $I$  y de los costos  $C$ .
5. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Verifican, para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ , en el cual la función  $F$  es la antiderivada de  $f$ .

### RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Interactivo para la integral definida  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html>
- Explicación de la integral definida  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/>
- Aplicaciones a la administración y la economía  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm>