Actividad 4: Argumentado la existencia de límites de funciones reales

PROPÓSITO

Los estudiantes se aproximan a las nociones de lo infinitesimal y lo infinitamente grande. Ambos infinitos se pueden hallar en los números reales, que son la base de las actividades que se propone. Piensan con perseverancia para entender cómo se comportan las imágenes de una función cuando los elementos del dominio se aproximan infinitesimalmente a un número escogido. Trabajan proactivamente elaborando tablas, gráficos y cálculos para describir cómo los elementos del dominio tienden al infinito positivo o negativo, y cómo esta aproximación los lleva a los términos de convergencia o divergencia de la función.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

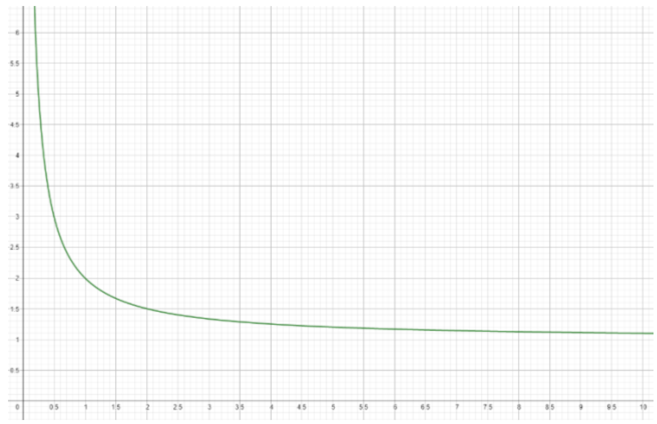
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿CUÁNDO EXISTE EL LÍMITE DE FUNCIONES?

1. La imagen muestra el gráfico parcial de una función real f con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que es la suma de una función constante k con $k(x) = 1$ y la función g con $g(x) = \frac{1}{x}$.



   a. Avanzando en el eje X, es decir, cuando $x \to \infty$, ¿a qué número tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta desde el gráfico.

   b. La función f es la suma de las funciones k y g. Si se considera el avance $x \to \infty$, ¿a qué valor tienden $k(x)$ y $g(x)$? Explica la respuesta utilizando el gráfico.

   c. ¿Cuál es la ecuación de la recta al cual se acerca infinitamente el gráfico de f? Grafica esta recta en el mismo plano cartesiano donde se encuentra f.

   d. ¿Observas alguna similitud entre esta gráfica y la realizada en la actividad anterior?

   e. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿existe un número al cual tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta a un compañero, utilizando el gráfico.

   f. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿a qué recta se acerca infinitamente el gráfico de f? Argumenta y explica la respuesta.

2. Si se tiene una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interesa saber qué sucede cuando x se acerca infinitesimalmente a un valor específico. Estudia esto, usando las tablas y gráficos de las funciones siguientes:

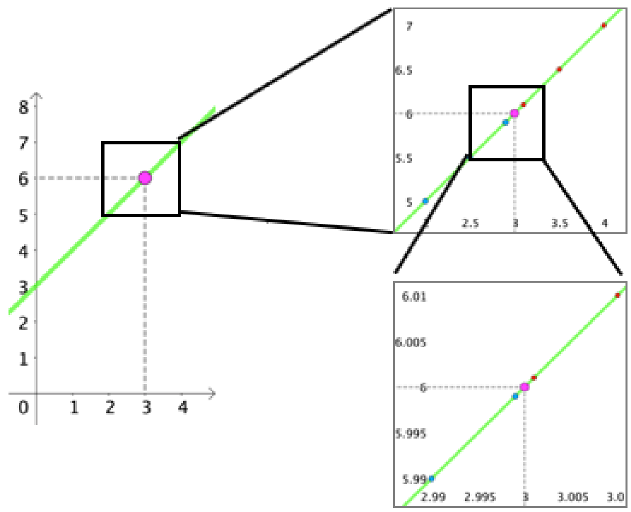
   a. Función afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por la expresión $f(x) = x + 3$. Observa cómo se comportan los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a 3 por la derecha (valores mayores que 3, pero muy cercanos a 3) en la primera tabla y cuando x se acerca a 3 por la izquierda (valores menores que 3 pero muy cercanos a 3) en la segunda tabla. Completa las tablas:

Tabla

x	$f(x)$
2	$f(2) = \quad +3 = 5$
2,5	$f(\quad) = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$
2,9	$f(2{,}9) = 2{,}9 + \quad = 5{,}9$
2,99	$f(2{,}99) = 2{,}99 + 3 =$
	$f(2{,}999) = 5{,}999$
	$f(2{,}99999) =$
	$f(\quad) = 5{,}9999999$

x	$f(x)$
4	$f(4) = +3 = 7$
3,5	$f(\quad) = 3{,}5 + 3 = 6{,}5$
3,1	$f(3{,}1) = 3{,}1 + \quad = 6{,}1$
3,01	$f(3{,}01) = 3{,}01 + 3 =$
	$f(3{,}001) = 6{,}001$
	$f(3{,}00001) =$
	$f(\quad) = 6{,}0000001$

Gráfico



b. Observa el esquema de la derecha y explica la relación entre el esquema y los valores de las tablas.

c. Lee con tu compañero la siguiente explicación del profesor: "Si en ambos casos, cuando x se acerca a 3 (por la izquierda o por la derecha), el valor de $f(x)$ se acerca a 6, entonces se puede escribir:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x + 3) = 6\text{''}.$$

¿Por qué piensas que es así? Conversa con tu compañero y lleguen a una conclusión conjunta. Nota: la expresión $\lim_{x \to 3}(x + 3) = 6$ se lee "el límite de la función $x + 3$, cuando x tiende a 3, es 6" o bien "el límite de $f(x)$ es 6 cuando x se acerca infinitesimalmente a 3 por la derecha y por la izquierda".

d. Estudia a qué valor tiende $f(x) = x^2$ cuando x tiende a 2, completando las siguientes tablas:

x	$f(x)$
1	$f(1) = 1^2 =$
1,5	$f(1{,}5) = 1{,}5^2 =$
1,9	$f(1{,}9) = 1{,}9^2 =$
1,99	$f(1{,}99) = 1{,}99^2 =$
1,999	$f(1{,}999) =$
1,99999	$f(1{,}99999) =$
1,99999999	$f(1{,}9999999) =$

x	$f(x)$
3	$f(3) = 3^2 =$
2,5	$f(2{,}5) = 2{,}5^2 =$
2,1	$f(2{,}1) = 3{,}1^2 =$
2,01	$f(2{,}01) = 3{,}01^2 =$
2,001	$f(2{,}001) =$
2,00001	$f(2{,}00001) =$
3,0000001	$f(2{,}0000001) =$

e. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando x tiende a 2? Escribe tu hallazgo como el límite de una función:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

3. Considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando x tiende a -1. Usaremos la notación $x \to -1^+$ para indicar que x tiende a -1 por la derecha, y $x \to -1^-$ para indicar que x tiende a -1 por la izquierda.

a. Completa la tabla, usando una calculadora u otra herramienta apropiada para realizar los cálculos.

$x \to (-1)^-$	-2	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	…	-1	…	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$	0	$(-1)^+ \leftarrow x$
$f(x) \to$					…	___ ___	…					$\leftarrow f(x)$
Aproximación a -1 por la izquierda $(x \to -1^-) \to$						=	← Aproximación a -1 por la derecha $(x \to -1^+)$					

b. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^+$? ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^-$?

c. Si en ambos casos se obtiene el mismo resultado, entonces es posible escribir el resultado:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2} = \_\_\_\_\_\_$$

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Comúnmente se utiliza un lenguaje ambiguo para hablar de límite; por ejemplo, al decir la función "tiende al límite", se puede pensar que hay puntos que nunca tomarán ese valor y, si la función es continua en ese punto, el límite de la función en él es precisamente el valor de la función en ese punto.

2. Se puede considerar como "límite" un valor al cual la sucesión se acerca para valores muy grandes de n. La noción de límite es local y en la gráfica se puede decir que, por más pequeños que consideremos una vecindad de x, los valores de la sucesión no "tocarán" este límite. En el caso de una sucesión, se puede decir que se acerca al límite sin tocarlo. Además, tiene que explicarles que un "límite" siempre debe ser un número y que el infinito no es un número. En esta etapa, conviene utilizar los términos de convergencia y divergencia de sucesiones.

3. Al final de esta actividad, y para relacionar la sucesión de las balanzas presentada en la actividad 1, se sugiere graficar la función $\frac{x+1}{x}$ para analizar lo que ocurre cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se propone utilizar una tabla Excel para dar valores de *x* muy grandes o pequeños (negativos), para que los jóvenes observen que la función tiende a 1, cuando x tiende tanto al infinito positivo como al infinito negativo. Se recomienda también hacer notar la diferencia entre qué significa que la gráfica de la curva no sobrepase la recta y =1 y la noción de límite. Cabe notar que la función toma valores mayores a 1 para valores de x positivos menores a 1, situación que se puede utilizar para enfatizar que, en el caso del límite, se debe especificar la tendencia de los valores de x.

4. Según el contexto del curso, se puede avanzar al cálculo de límites de funciones reales e introducir la notación simbólica para describir lo que ocurre con la función y sus límites, por ejemplo:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq \lim_{x \to -\infty} f(x)$, para indicar que los límites laterales son diferentes.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \nexists$, para indicar que no existe el límite de la función.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

   - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Volumen de un cono, applet
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/g8QE7eHc

- Una definición de límite de una función
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Límite_de_una_función

- Teoría y práctica con límites
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm3a.html