# Actividad 3: Argumentando con la noción de límites en diferentes contextos

## PROPÓSITO

Los estudiantes piensan con perseverancia para desarrollar el concepto de límite de sucesiones y series numéricas. Elaboran proactivamente representaciones de ellas en la recta numérica y el sistema de coordenadas para proyectar y conjeturar hacia el infinito. Además, se espera que expliquen pictóricamente lo que significa el límite; que transfieran la representación pictórica al nivel simbólico, que planteen una conjetura acerca de un posible límite y la confirmen o rechacen con el cálculo de límite.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

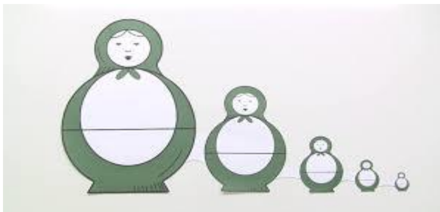
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

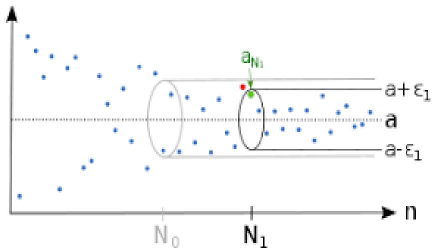
**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

## COMPRENDIENDO EL CONCEPTO DE LÍMITE

1. Observa y describe las dos imágenes a tu compañero.



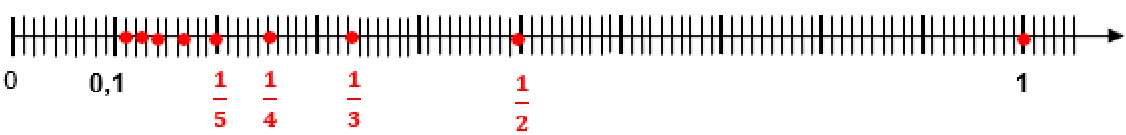



   a. ¿Qué piensas que quieren decir estas imágenes?
   b. ¿Cómo las puedes relacionar con la palabra "límite"?
   c. ¿Cómo se vinculan con "sucesión" o "serie"?
   d. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: "Para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño que sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon". ¿Qué imagen corresponde mejor al párrafo? Explica cada elemento a tu compañero.

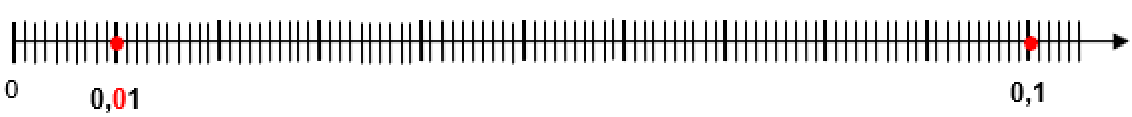
## ¿QUÉ ENTENDEMOS POR CONVERGENCIA?

1. La imagen muestra números de una sucesión marcados con puntos rojos en el segmento de la recta numérica entre 0 y 1.

   a. Los números se acercan al número 0,1, disminuyendo la diferencia entre dos términos seguidos. ¿Por qué el número 0,1 no puede ser el límite de la sucesión? Encuentra la expresión general de la sucesión.



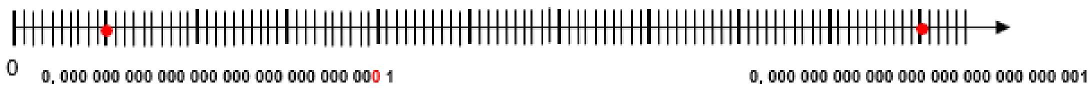

   b. Se considera el segmento entre 0,1 y 0. ¿Cuál es la posición $n_0$ de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda?




$n_0=$

c. A continuación, se representa más aumentos de la recta numérica. Determina la posición $n_0$ de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda.


$n_0=$




$n_0=$

d. Si se sigue observando los números $\frac{1}{n}$ con una "lupa imaginaria" con más y más aumentos, llegando a más posiciones $n_o$, contesta las siguientes preguntas y explica las respuestas de forma verbal.

i. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \leq n_0\}$?

ii. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \geq n_0\}$?

iii. Los números representados por $a_n = \frac{1}{n}$, ¿pueden disminuir a números negativos?

iv. ¿Por qué el número 0 es límite de la sucesión?

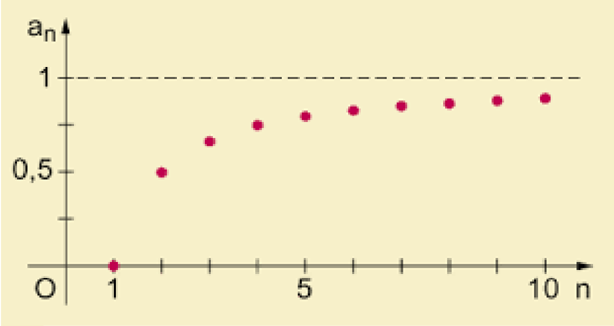
v. Llegando los puntos a cada posición $n_0$ nueva y desplazando hacia "0", ¿quedan menos números a recorrer?

e. Se considera un "intervalo $\varepsilon$" alrededor del límite 0 "$[\,0-\varepsilon\,,0\,+\,\varepsilon\,]$" y se elige un valor de $\varepsilon = 0{,}0000000005$. ¿A partir de qué número $n_0$ todos los términos $a_n$ están dentro de $[\,0-\varepsilon\,,0\,+\,\varepsilon\,]$?

f. Verifica que, para cada ε > 0 y muy cercano a 0, ocurre la misma situación: a partir de un cierto $n_0$ todos los términos $a_n$ están en el intervalo $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$.

g. Verifica que para un "límite falso", por ejemplo "$\frac{1}{100}$", no ocurra la situación.

2. La imagen muestra un gráfico de puntos que representa una sucesión $(b_n)$.




   a. Determina el término general $b_n$.

   b. Conjetura acerca del límite de la sucesión.

   c. Determina algebraicamente $\lim_{n \to \infty} b_n$.

3. Determina algebraicamente el límite de la sucesión $(a_n)$ con $a_n = \frac{2-3n^2}{(2n+1)^2}$.

4. Elaboración de sucesiones a partir de un límite dado.

   a. Elabora el término general de una sucesión con expresión fraccionara $(c_n)$ que tiene el límite $\lim_{n \to \infty} c_n = \frac{3}{2}$

   b. Elabora un término general de una sucesión con expresión fraccionara $(d_n)$ que no tenga límite.

## ¿CÓMO CALCULAR $\sqrt{2}$ ?

1. El gráfico de más adelante muestra una sucesión de cinco fichas rectangulares de 12 cm$^2$ de área cada uno. Las fichas tienen un vértice común y están apiladas en una mesa, de tal manera que la ficha con el mayor largo esté más abajo.

   a. A partir de dicho gráfico, elabora con tus compañeros de grupo una tabla que muestre los valores posibles de los lados de los rectángulos.

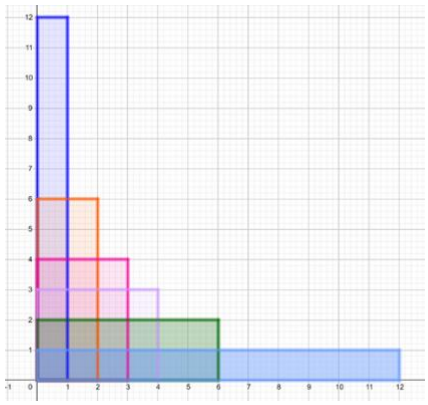
   b. Dibujen un gráfico de puntos de los vértices superiores derechos de cada rectángulo.

   c. Determinen la ecuación de la sucesión que representa la altura $a_n$ de los rectángulos.

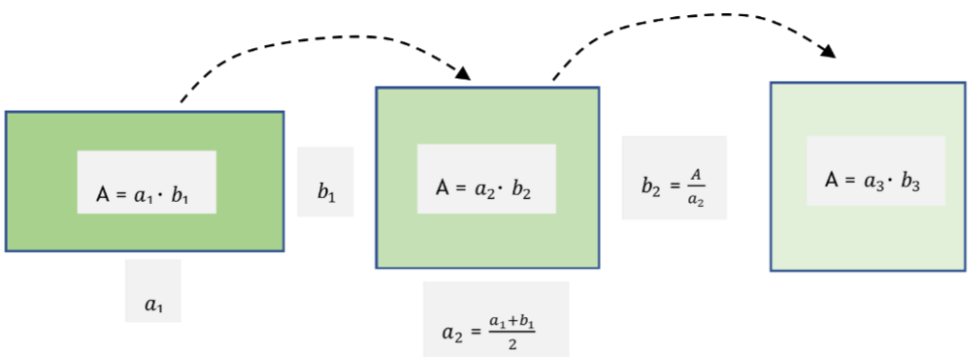
   d. Determinen el límite $\lim_{n \to \infty} a_n$.

   e. Tomando en cuenta el área de cada rectángulo, ¿qué número puede resultar para la expresión "$\infty \cdot 0$"?

f. Conjeturen acerca de la pregunta: ¿Hay más números que podrían resultar de la expresión $A = r^2$? Verifiquen la conjetura con ejemplos.



2. El siguiente esquema muestra el proceso de elaborar una sucesión infinita con la cual se puede determinar la raíz cuadrada irracional de un número racional “A”, cuya representación pictórica es transformar un rectángulo en un cuadrado. El matemático y filósofo Herón de Alejandría (10 d.C. – 70 d.C.) creó este método para calcular aproximadamente raíces cuadradas.




Así se explica el esquema: “Se transforma la ecuación cuadrática $x^2 = 2$, que tiene $\sqrt{2}$ como una de las soluciones en la ecuación $x = \frac{2}{x}$. Empezando con valor inicial $x_1$, se determina la cota inferior y la cota superior de los intervalos en los cuales siempre se encuentra $\sqrt{2}$; estas cotas determinan nuestro primer intervalo. Con la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + x'_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ se elabora nuevos intervalos, denominados encaje de intervalos, ya que se van poniendo uno dentro del otro y tienen como centro $\sqrt{2}$”.

a. Explica a tu compañero lo que entendiste de esta explicación. Elaboren juntos un ejemplo.

b. ¿Cuál es la premisa para que la ecuación $x^2 = 2$ se pueda transformar en la ecuación $x = \frac{2}{x}$ y por qué se cumple?

c. Ahora consideren el valor inicial $x_1 = 2$ (superior a $\sqrt{2}$ y primera cota superior del intervalo) y sigan con la ecuación: $x = \frac{2}{x}$, resultando el término $x_1{}' = \frac{2}{2} = 1$ (inferior a $\sqrt{2}$ y primera cota inferior del intervalo). Determinen los primeros 6 intervalos del encaje de intervalos mediante la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$. Completen la tabla, calculando fracciones en vez de números decimales y utilizando una calculadora.

| N | Cota inferior/superior $x_n$ | Cota superior/inferior $x_n' = \frac{2}{x_n}$ | Promedio entre $x_n$ y $x_n'$ $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 2$ | $x_1' = \frac{2}{2} = 1$ | $x_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ |
| 2 | $x_2 = \frac{3}{2}$ | $x_2' = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ | $x_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{21}{12}$ |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

d. Comparen el valor aproximado con el valor aproximado que expresa la calculadora.

e. ¿Con qué valor inicial $x_1$, los siguientes pasos de aproximación a $\sqrt{2}$ son iguales a comenzar con $x_1 = 2$? Argumenten y comuniquen la respuesta, mostrando un ejemplo a su compañero.

f. ¿Se puede aplicar el procedimiento de Herón para todos los números reales? Prueben de forma sistemática, comuniquen la respuesta a dos compañeros, al menos, y argumenten en 3 frases como máximo.

## ¿CUÁNDO NO EXISTE EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN?

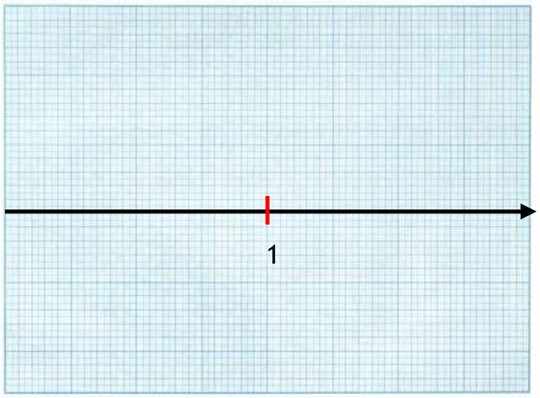
1. Determina algebraicamente el límite de las sucesiones o argumenta la inexistencia de las siguientes sucesiones.

   a. $(a_n)$ con $a_n = \frac{(2n+1)^2}{1-3n^2}$.

   b. $(b_n)$ con $b_n = \frac{(3n-1)^2}{3n-1}$.

2. Se considera la sucesión $(c_n)$ con $c_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$.

   a. Marca los primeros 8 elementos en la recta numérica.




   b. Conjetura acerca de la existencia del límite de $(c_n)$

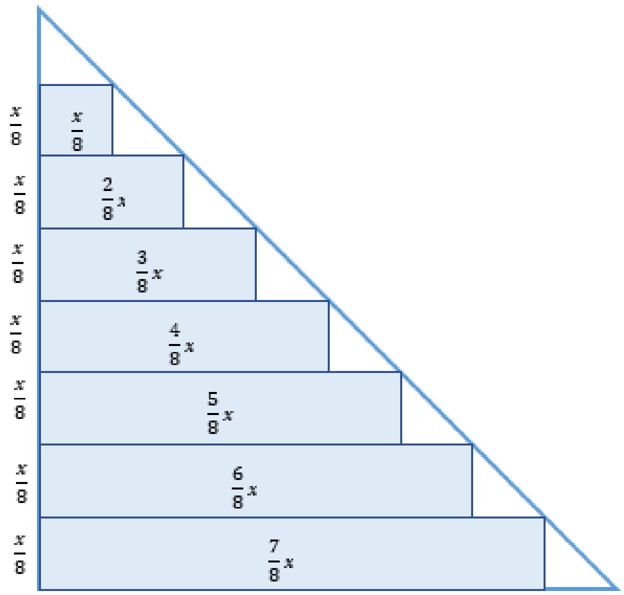
   c. Verifica la conjetura, determinando $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ y considerando números pares e impares.

   d. Si la ecuación de la sucesión se cambia a $d_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$, ¿qué efecto tiene el cambio? Argumenta la respuesta.

Se sugiere abordar la siguiente actividad en forma grupal.

## CALCULANDO ÁREAS MEDIANTE LA NOCIÓN DE LÍMITES

1. La imagen muestra un triángulo rectángulo isósceles de catetos $x$ (el grande). Expliquen qué entienden de la imagen. Redacten una pregunta y describan cómo la noción de límite les podría ayudar a responderla.




Respondan dentro del grupo lo siguiente:

a. ¿Cuál es la expresión algebraica del área de este triángulo?
b. La imagen muestra una aproximación inferior mediante rectángulos del ancho $\frac{x}{8}$. Determinen la suma de todos los rectángulos y comparen con la expresión del área del triángulo.
c. ¿Qué porcentaje del área total se ha alcanzado con esta aproximación inferior de la subdivisión de la altura en $\frac{x}{8}$?
d. Con herramientas tecnológicas digitales, determinen aproximaciones hasta alcanzar el 90% del área total.
e. ¿Qué aproximación será una subdivisión en $\frac{x}{10}$?
f. Desarrollen una expresión algebraica para una aproximación inferior del triángulo en rectángulos del ancho $\frac{x}{n}$. (Notar que $A_n = \frac{x^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 3 \cdot \frac{x^2}{n^2}$ + ... + (n-1) $\cdot \frac{x^2}{n^2}$).
g. Factoricen la expresión $A_n$ lo más posible.
h. Considerando la fórmula de la suma de los primeros $n$ números naturales $\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ , desarrollen la expresión algebraica de los primeros $(n-1)$ números naturales.
i. Determinen el límite $\lim_{n-\infty} A_n$ y comparen con la expresión algebraica del triángulo elaborada en a.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Una forma diferente de acercarse a esta actividad es iniciarla con una “carrera de puntos” hacia el “infinito”, llegando a los “hitos” como “0,1”, “0,01”, “0,000 000 000 01”, “0,000 000 000 000 000 000 001” y “0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 1”. Para obtener una imaginación intuitiva de que es imposible acercarse verdaderamente con los términos al límite, los estudiantes deben calcular la cantidad de términos que quedan atrás del “hito” alcanzado, y conjeturar acerca de las posiciones de la sucesión que “faltan” para el límite.
2. Para entender el “intervalo $\varepsilon$” alrededor de un límite, es importante que comprendan que una inecuación de la forma “$n \leq n_0$” tiene finitas soluciones y para “$n > n_0$”, todos los números naturales mayores que $n_0$ forman el conjunto solución. Hay que motivar a los estudiantes a explicar la noción de límite en lenguaje natural: que para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño como sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon.
3. Se sugiere darles constantemente la posibilidad de conjeturar y averiguar sobre convenciones para el significado de las expresiones que involucran el infinito como “$\infty \cdot 0$”, las cuales son indeterminadas y no representan un término algebraico. La representación gráfica hace entendible, mediante la proporcionalidad inversa, que hay posibilidades indeterminadas de representar “$\infty \cdot 0$” como número.
4. Cabe notar que en esta actividad se muestra una sucesión cuyo límite es el número real de $\sqrt{2}$, la cual incluye una sucesión infinita de intervalos encajonados cuyo número interior es $\sqrt{2}$. Se sugiere invitar a los jóvenes a averiguar sobre este método y que prueben hacer cálculos que superen el uso de la calculadora.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Algoritmo de Herón de Alejandría para calcular la raíz cuadrada de un número
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://actividadesinfor.webcindario.com/algoritmo1.htm

- Biografía de Herón de Alejandría, su fórmula y método
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.matesfacil.com/matematicos/Heron/Heron-de-Alejandria-formula-area-triangulo-metodo-aproximar-raiz-cuadrada-demostracion.html

- Propuesta para calcular la raíz cuadrada, usando el método de cuadrar rectángulos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://docplayer.es/21463319-Propuesta-para-el-calculo-de-la-raiz-cuadrada.html