Actividad 2: Comprendiendo la paradoja de Zenón

PROPÓSITO

Los estudiantes argumentan sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie. La pregunta que orienta la actividad es si será posible que Aquiles alcance a la tortuga. Para contestar y extender una situación infinitamente en el tiempo, elaboran tablas y modelan la situación a fin de conjeturar y dar respuestas. Se espera que piensen con perseverancia y que identifiquen proactivamente aquellos conceptos sobre el límite que les permiten responder a la situación planteada.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

AQUILES Y LA TORTUGA

1. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: La paradoja del filósofo griego Zenón de Elea (490-430 a. Cr.) cuenta "la carrera de Aquiles con la tortuga", en la cual se conjetura acerca de la posibilidad de dividir una distancia física real del espacio en infinitas partes, y de la posibilidad de dividir un lapso real de tiempo en infinitas partes.

Conexión interdisciplinaria: **Filosofía.**
OA a, 3° y 4° medio.

   a. ¿Qué es una paradoja? Busca definiciones en el internet con tu compañero y contrasten esta definición con ejemplos de paradojas.
   b. Construyan paradojas propias en contextos diversos, como la vida, el tiempo, la filosofía, la matemática, las ciencias u otras áreas.
   c. Investiguen sobre otras paradojas famosas de la historia.

2. Investiguen en internet y redacten un resumen de 200 palabras como máximo, para compartir en clases sobre:
   a. La biografía de Zenón de Elea.
   b. La noción del "infinito" en la historia de la humanidad (cultura, religión, arte, ciencias naturales u otras áreas de interés).
   c. El término "infinito" en la historia de la matemática.

3. Basados en los resúmenes, discutan los siguientes puntos:
   a. Las consecuencias que tendría para el flujo de tiempo, una serie de intervalos de tiempo que sucesivamente se acercan a 0.
   b. La contradicción en la paradoja de Zenón.
   c. Situaciones paradójicas matemáticas en las cuales se incluye el infinito.

COMPRENDER LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

1. Se considera las siguientes condiciones de la carrera:

- La tortuga parte con 100m de adelanto.
- La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante.
- Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó $\frac{1}{10}$ del recorrido de Aquiles.

  Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10m, la tortuga ya avanzó otra vez $\frac{1}{10}$ del último recorrido de Aquiles.
- Este proceso se repite iterada e infinitamente.

a. Reconociendo las condiciones anteriores de la carrera, conjetura si Aquiles puede alcanzar a la tortuga o no. Si estimas que no puede alcanzarla, explícalo a tu compañero.

b. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las distancias entre la tortuga y Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera. Conjetura acerca del límite de la sucesión de los anchos de los intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Distancia entre ellos al final del intervalo de tiempo en m	10						

c. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las posiciones absolutas de la tortuga y de Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera, y en referencia al punto de partida de Aquiles.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Posición de la tortuga al final del intervalo de tiempo en m	110						
Posición de Aquiles al final del intervalo de tiempo en m	100						

d. Conjetura acerca de la siguiente estrategia: "El tiempo puede avanzar en unidades que se disminuyen en un porcentaje de la unidad anterior, paso por paso, y así no puede sobrepasar un cierto lapso".

e. Estima las siguientes magnitudes, bajo el supuesto de que el proceso de acercamiento se repite iteradamente:
- Tiempo total
- Recorrido total de la tortuga
- Recorrido total de Aquiles
- Distancia entre la tortuga y Aquiles

f. ¿Cómo se escribe el tiempo total de la corrida en forma decimal?

g. ¿Cómo se representa el tiempo de la corrida en forma de una fracción?

2. Traspaso de la situación de intervalos discretos de tiempo al modelo continuo del tiempo.

a. Con las condiciones de la carrera, determina cada elemento de las funciones del desplazamiento:

Tortuga *T:* $X_T(t) = v_T \cdot t + X_0$

Aquiles *A*: $X_A = v_A \cdot t$

v_T: velocidad de la tortuga

$v_{A:}$ velocidad de Aquiles

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, 3° y 4° medio.

b. Elabora los gráficos esquemáticos del desplazamiento de la actividad anterior. (Eje horizontal t, eje vertical desplazamiento *X(t)*, X_0 adelanto de la tortuga, τ tiempo en el momento del alcance).

c. Determina gráficamente el tiempo que pasa hasta que Aquiles alcance a la tortuga.

d. Determina gráficamente el recorrido de Aquiles y de la tortuga cuando Aquiles alcanza a la tortuga.

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Consideren la siguiente tabla de sucesión de los intervalos de tiempo que pasan desde la partida.

Número n del intervalo de tiempo	1	2	3	4	4	5	6
Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$

a. Desarrollen la expresión algebraica de los intervalos de tiempos con potencias de base "10": $t_n = 10^n$

b. Calculen la suma de los primeros 8 tiempos de la actividad anterior y represéntenla como número decimal.

c. Suponiendo que haya infinitos intervalos de tiempo construidos mediante la expresión de la actividad b, y recordando la transformación de números decimales periódicos, ¿con que fracción se puede expresar el número decimal que representa la suma de los tiempos t_n?

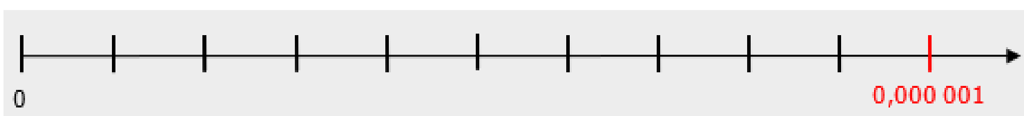
d. Representando la suma de los intervalos de tiempos como serie, ¿por qué es una serie geométrica?

e. Expresen la serie 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + … como serie geométrica con los términos t_1 y q.

f. Determinen el límite de la serie.

g. En un sistema de coordenadas, elaboren un gráfico que representa discretamente el recorrido de Aquiles según el tiempo, basándose en los tiempos: 10s; 11s; 11,1s; 11,11s;… Expliquen el tipo del gráfico que resulta.

h. Se considera la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{1}{n}$ y una "carrera" en la recta numérica, haciendo "saltos" de un término de la sucesión hasta el próximo término. Suponiendo que haya avanzado con un millón de saltos hasta el término $a_{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$, ¿se puede decir que "ahora faltan menos saltos hasta el límite 0 que al inicio de la carrera"? Argumenten y comuniquen la respuesta a un compañero.



ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda iniciar la actividad individual con el cuento de la corrida entre Aquiles y la tortuga, y motivar a los estudiantes a que argumenten matemática y prácticamente si es o no posible que Aquiles alcance a la tortuga.

2. En la estimación intuitiva del límite, se les puede recordar cómo convertir las fracciones en números decimales periódicos y viceversa, para trabajar con números que les sean más familiares. También se puede transformar, paso a paso, una adición de fracciones decimales en números decimales periódicos y viceversa, como:

$$S_6 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \ldots, S_6 = 10 + 1 + 0{,}1 + \cdots$$

3. Para resolver el problema mediante gráficos de funciones lineales afines, los alumnos deben saber que, en el modelo de Zenón, se considera posiciones relativas entre Aquiles y la tortuga, mientras en este modelo se contempla el desplazamiento absoluto de Aquiles y de la tortuga en dependencia del tiempo corriente.

4. Se sugiere elaborar la expresión con números de una serie geométrica infinita, luego escribir su expresión algebraica y de ahí determinar su límite para $n \to \infty$.
5. Con base en este límite, los alumnos determinan los límites de los recorridos de Aquiles y de la tortuga. En el gráfico, los puntos se enfilan en una línea recta cuya "pendiente" es el factor 10, que es el inverso multiplicativo del factor q de la serie geométrica.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones o series.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- El problema de Aquiles y la tortuga

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://demostracionpy.wordpress.com/2015/02/14/aquiles-y-la-tortuga/

- Matemática e historia

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/HISTORIA/historia_Zenon.htm

  La paradoja de Aquiles

- https://www.curriculumnacional.cl/link/http://cienciacomonunca.blogspot.com/2014/08/resolviendo-la-paradoja-de-aquiles-y-la.html