Actividad 2: Representar la composición de funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden la noción de componer funciones y utilizan representaciones pictóricas y simbólicas para la operatoria de funciones. También comparan la compuesta con la suma de funciones y reconocen diferentes funciones, pensando con flexibilidad para reelaborar e incluir conocimientos sobre la operatoria de funciones y cambiar eventualmente sus puntos de vista y creencias relacionadas con las funciones y su composición.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

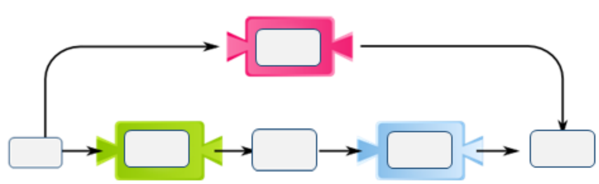
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

CONCEPTO DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. Observa el siguiente esquema y explica a tu compañero lo que entiendes al verlo.

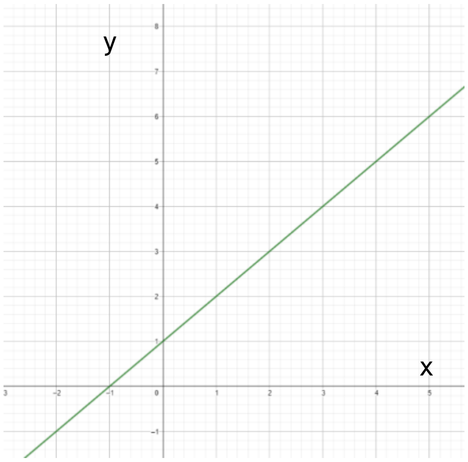


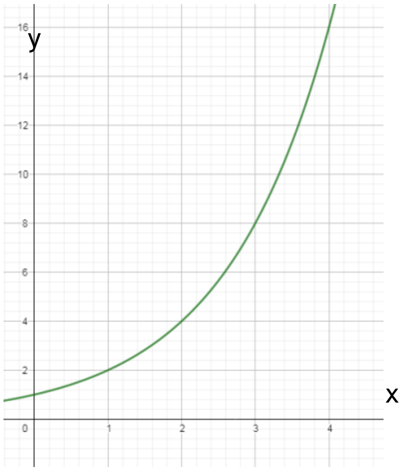
   a. Rotula el dibujo esquemático, formado por "máquinas", con las expresiones simbólicas de $g \circ f, f(g(x)), g, f, x$ y $g(x)$.
   b. Haz funcionar la máquina con un cambio afín $g(x) = x + 1$ y la función f potencia cúbica.
   c. Elabora la compuesta $g \circ f$ expresándola de la forma $g(f(x))$.
   d. Elabora la compuesta $f \circ g$ cambiando el orden de aplicación, ¿qué ocurre con el esquema?

LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONOCIDAS

La composición de dos funciones en comparación con la suma de las mismas funciones.

1. Observa los dos gráficos e identifica la función que representan.



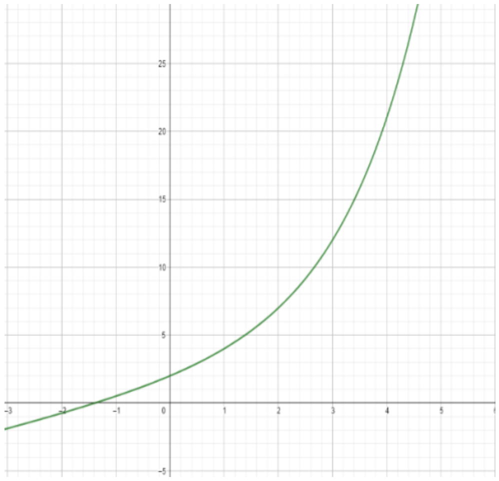


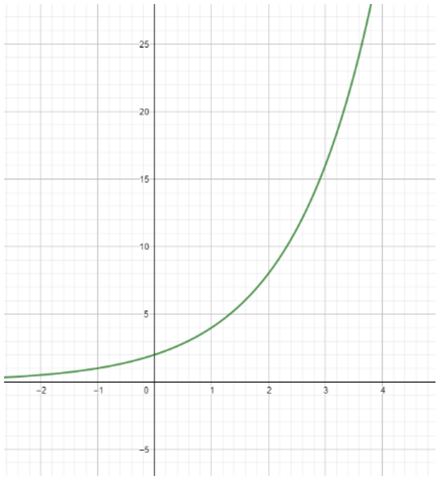
a. A continuación, se presenta cuatro funciones:
   - $f(x) = 2^x$
   - $g(x) = x + 1$
   - $h(x) = 2^{x+1}$
   - $s(x) = 2^x + x + 1$

   Identifica la función con su gráfico.

b. Identifica cada una de las funciones con alguna de las siguientes expresiones verbales:
   - La función exponencial más la función afín.
   - A la variable se le ha sumado uno.
   - La variable más uno es el exponente.
   - La variable es el exponente de la función.
   - La variable es el exponente y a la potencia se le ha sumado la variable y uno.

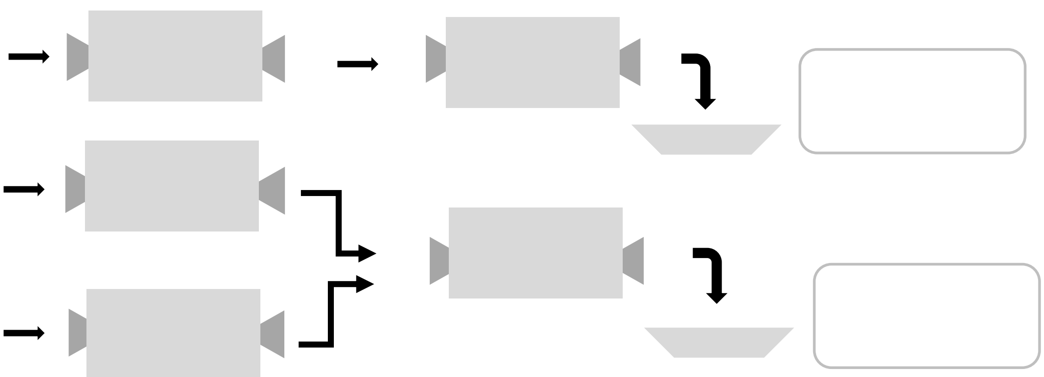
2. Observa los siguientes gráficos e identifica la función correspondiente:





   a. Identifica las diferencias y descríbeselas a tu compañero.
   b. ¿Qué relaciones puedes ver con las funciones presentadas antes?
   c. ¿Cuál de ellos representa la composición de funciones $f \circ g$? ¿Cómo puedes estar seguro?

3. La figura de abajo muestra dos modelos distintos de interacción entre máquinas que representan la operación aritmética (adición, sustracción, multiplicación o división) entre funciones, o la composición de funciones.



   a. Rotula en el recuadro los modelos correspondientes con “operación” o “composición”.
   b. Considera las funciones

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = x + 1$$

   y haz funcionar el esquema para la suma, la resta y la compuesta de estas funciones.
   c. Mirando el esquema de la composición de funciones, ¿qué rol tiene el recorrido de la primera función?

d. Elabora la ecuación de la función compuesta k en la cual se cambia el orden entre ambas funciones $g \circ f = k(x)$.
e. Elabora el gráfico de esta función compuesta k y contrástala con la función $h(x) = 2^{x+1}$.

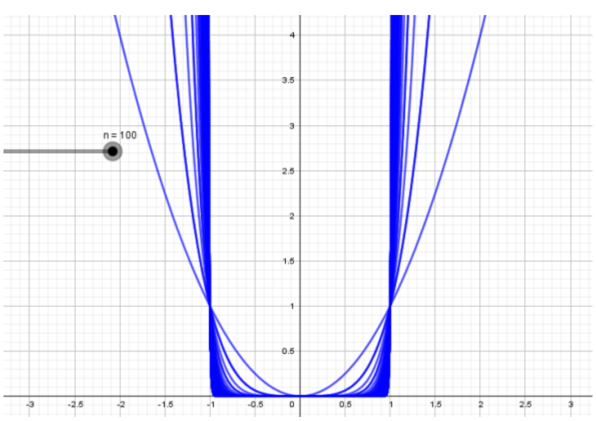
4. Encuentra una función $t(x)$ tal que, al componerla con
$$g(x) = x + 1,$$
se obtenga la función I(x) = x.
5. Crea dos funciones tales que, al componerlas, obtengas la función I(x) = x

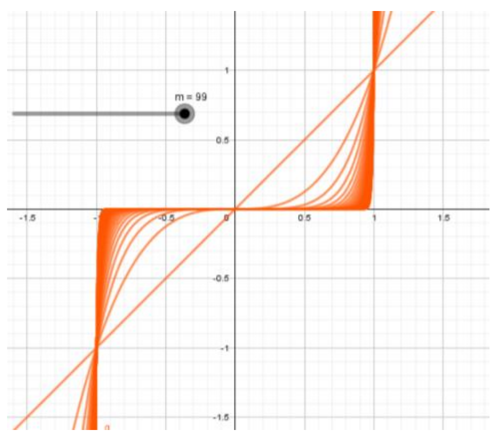
UNA FUNCIÓN MUY PARTICULAR

1. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x$.
a. Grafica la función en el plano cartesiano.
b. ¿Qué tipo de relación se da en esta función? Describe el comportamiento de la función con tus propias palabras.
c. Considera distintos conjuntos de partida para la función; por ejemplo: solo los números naturales, solo los números enteros, solo los números racionales o intervalos. ¿Cuáles son las diferencias? ¿Qué ocurre con el conjunto de llegada?
d. ¿Por qué crees que es una función particular? ¿Qué dirías sobre lo que le ha pasado a la variable?
e. Compone varias veces la función con ella misma. ¿Qué ocurre? Y si sumas varias veces la función con ella misma, ¿qué ocurre?

FAMILIAS DE FUNCIONES

Enfóquense ahora en otros casos particulares de funciones potencia, dentro de la misma familia de funciones definida por $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. A continuación se muestra la gráfica de una familia de funciones.





Familia 1 Familia 2

Te puedes apoyar en la tecnología para responder y reflexionar sobre las preguntas:

a. ¿Qué condiciones para n se debe tener para generar la familia 1 y 2 de funciones?
b. ¿Qué diferencias hay entre ambas familias de funciones?
c. ¿Qué ocurre cuando compones algunas de estas funciones? Prueba dentro de una misma familia y luego con funciones de ambas familias.
d. ¿Qué ocurre si consideras otros valores para n enteros y menores a 1? ¿Se forma una nueva familia? Representa gráficamente estas soluciones.
e. ¿Qué ocurre cuando compones funciones de diferentes familias?

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN UN CONTEXTO DE LA ECONOMÍA

Un producto se fabrica en varias fases; por ejemplo: refinar la materia prima y después, convertir la materia refinada en un producto industrial.

a. ¿Por qué se puede modelar estos procesos industriales de producción con modelos matemáticos de composición de funciones? Argumenten y comuniquen la respuesta.
b. En la refinación de una materia prima se considera costos fijos k, más los ingresos variables por refinar, que son proporcionales a la cantidad x del material refinado. ¿Qué función matemática g puede modelar las ganancias en esta fase de producción? Elaboren la ecuación de esta función en general, sin valores numéricos; en ella, m es el factor de proporcionalidad.
c. En la Bolsa de Metales de Londres, el precio de una materia prima refinada varía cerca de US$ 2,21[5] por libra. Determinen el precio por megatonelada Mt[6].
d. En la producción de una de las materias primas refinada hay costos fijos de US$ $500\,000\,000$. Elaboren la ecuación de la función afín g que modela las ganancias por la refinación.
e. En la conversión de una materia refinada en un producto industrial, las ganancias por capital invertido se determinen aproximadamente por la función f con $f(z) = -0{,}2(z^2 - 6z)$, en la cual la variable z representa US$ $1\,000\,000\,000$. Conjeturen acerca del valor de z_m que representa las ganancias máximas. Expliquen la conjetura.
f. Completen la siguiente tabla funcional para verificar o rechazar la conjetura.

z	0	1	2	3	4	5	6
$f(z)$							

g. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de la función f.

[5]$US: dólar estadounidense
[6]1Mt = 1 000 000t

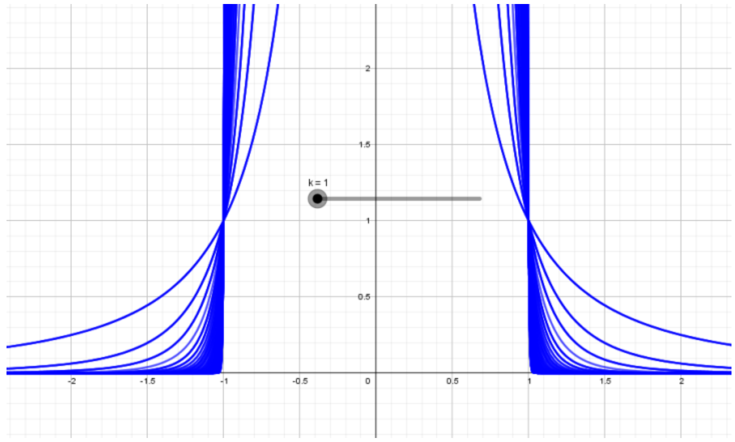
h. Considerando el gráfico, ¿qué pasa con el capital invertido si se sobrepasa el valor de US$ $6\ 000\ 000\ 000$?
i. Desarrollen la ecuación de la composición de ambas funciones $g \circ f$.
j. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de $g \circ f$.
k. ¿Hasta qué cantidad de materia refinada se obtiene ganancias en la conversión ulterior a un producto industrial?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

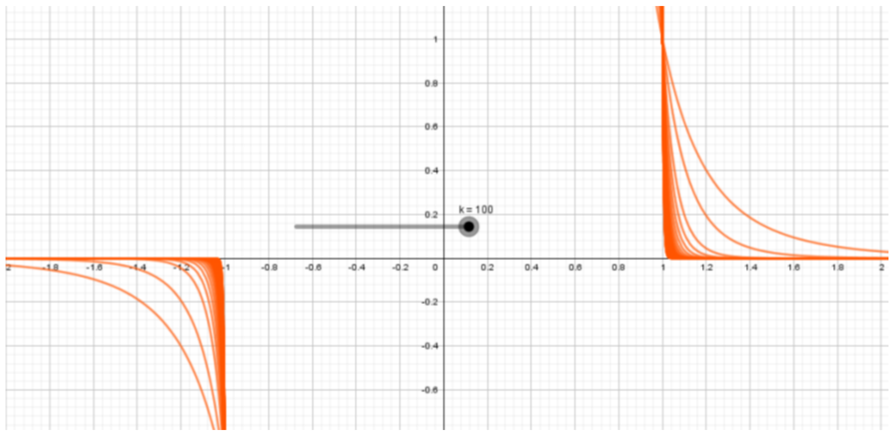
1. En estas actividades se propone el estudio particular, inicialmente sin contexto cotidiano, de la función exponencial y la compuesta con la función lineal, dada la cercanía con los estudiantes. Desde 8° básico vienen trabajando con la función lineal, primero como relación de proporcionalidad directa para luego generalizarla como la función afín. Más adelante, en 2° medio, estudian la función cuadrática y la raíz cuadrada, momento en que se da un énfasis a la aplicación de estas funciones. En este curso, se debe profundizar en términos de describir el dominio y el recorrido, y encontrar condiciones para invertir las funciones; además, se tiene que enfatizar en describir el comportamiento de la función y las situaciones de cambio que describen. La función potencia se estudia en 4° medio en detalle. Si no se ha trabajado antes de esta actividad, no debiese ser un obstáculo para realizarla, ya que se usa el gráfico y el docente puede describir y comentar su comportamiento para luego profundizar en esta función.
2. Se espera que los jóvenes propongan varios casos particulares de la función potencia, diferenciando entre el caso de la función potencia de exponente par positivo y la función potencia de exponente impar positivo.
3. Según el contexto de sus estudiantes, se sugiere hacer el mismo tratamiento para la función raíz enésima par, donde pueden apreciar otras funciones y aproximarse a la noción de inversa.
4. En los casos estudiados, se puede tratar las definiciones no formales de la inyectividad y sobreyectividad junto con la técnica de la línea horizontal, que indica que, si toda línea horizontal toca a lo más un punto de la curva, es inyectiva, y si toca al menos un punto, es sobreyectiva. Se recomienda que los estudiantes argumenten utilizando el gráfico. Si lo estima adecuado, conviene hacer las definiciones formales para trabajar la escritura simbólica matemática.
5. Si el contexto y el tiempo lo permiten, se sugiere trabajar las siguientes funciones de familias:

   – La familia de funciones $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$.
   – La familia de funciones potencia $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$

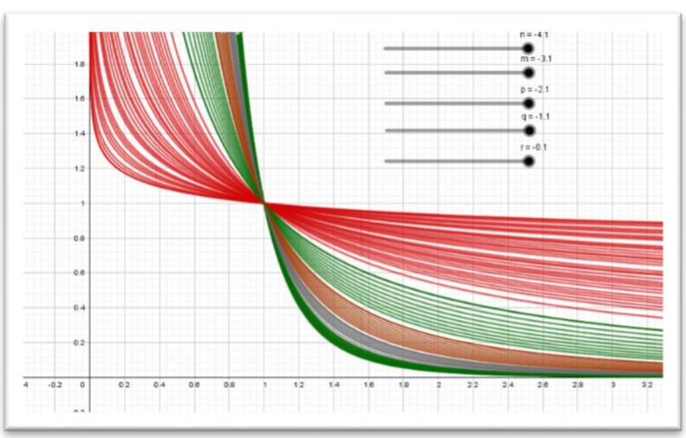
   Caso $n = -2k, k \in \mathbb{N}$; es decir, exponentes pares negativos.



Caso $n = -2k + 1, k \in \mathbb{N}$, es decir, exponentes impares negativos.



Caso valores negativos de n en intervalos; por ejemplo: $-5 < n < -4$; $-4 < n < -3$; $-2 < n < -1$; $-1 < n < 0$.



6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Calculadora gráfica DESMOS
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.desmos.com/calculator

- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc

- Guía con definiciones y algunos ejercicios
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F160049%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FFunciones.pdf