

## Actividad 4: Resolver problemas que involucran mediciones en el sistema de coordenadas 3D

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes determinen distancias en el espacio, módulos y ángulos entre vectores, de manera visual y con herramientas digitales. Aunque algunas actividades pueden resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello, por lo que se sugiere que empleen apoyo tecnológico. Se pretende que resuelvan problemas en contexto, en los cuales se requiera usar puntos, vectores, rectas y planos en el sistema 3D. Para esto, tienen que trabajar colaborativamente y compartir las diferentes habilidades y experticias en conocimiento y habilidades espaciales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE INVOLUCRAN MEDICIONES

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo determinar módulos de vectores?

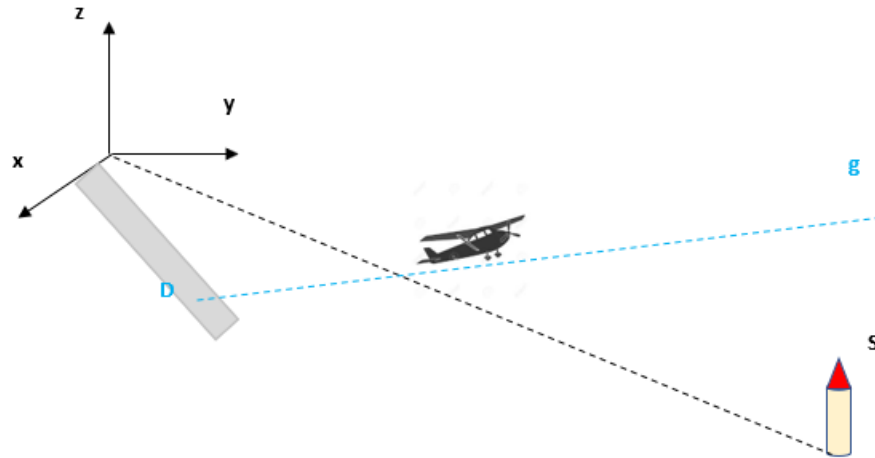
En el sistema cartesiano 3D, marquen el punto  $S(4; 5; 3)$ , dibujen el vector posicional  $\vec{s}$ , estimen su módulo y determinenlo mediante la función “Abs()” de GeoGebra 3D. Comparen el resultado, midiendo la longitud del vector con la herramienta “Distancia o Longitud”.

2. ¿Cómo determinar el largo de segmentos?
- Ubiquen en el sistema cartesiano 3D, los puntos  $A(-6; -2; 3)$  y  $B(6; 1; 7)$ . Dibujen sus vectores posicionales. Estimen la distancia del segmento  $AB$  y anoten esa estimación en sus cuadernos.
  - Comprueben su estimación con GeoGebra 3D, mediante la herramienta “Distancia o Longitud” el largo del segmento  $AB$ . Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
  - Marquen los puntos  $P(1; 2; 4)$ ,  $Q(2; 4; 0)$  y  $R(-4; 6; 2)$ . Además, marquen el punto medio  $M_{QR}$  del lado  $QR$  y dibujen el segmento  $PM_{QR}$ . Dibujen los vectores posicionales de cada punto. ¿Cuánto mide el largo del segmento  $PM_{QR}$ ? Hagan una estimación y anótenla en sus cuadernos.
  - Comprueben, usando la herramienta “Distancia o Longitud” de GeoGebra.
  - Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
3. ¿Cómo determinar el ángulo entre dos vectores?
- Ubiquen los puntos  $K(2; 4; 6)$ ,  $L(4; 6; 0)$  y  $M(0; 9; 0)$ , que determinan un triángulo en el espacio. Dibujen sus vectores posicionales.
  - ¿Cómo se puede establecer el ángulo interior  $\delta$  en el vértice  $K$ ? Hagan una estimación:  
\_\_\_\_\_
  - Comprueben, usando la herramienta “Ángulo” de GeoGebra.
  - Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
4. ¿Cómo saber la distancia entre un punto y un plano?
- Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
  - Imaginen que se tiene un punto  $P$  y un plano  $E$  dado en su forma cartesiana. Usando las herramientas de GeoGebra 3D, elaboren una estrategia para determinar la distancia entre  $P$  y  $E$ . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
  - Determinen la distancia entre el punto  $P$  y el plano  $E$ , con  $P(2; 0; 1)$  y  $E: x + 8y - 4z = 25$ .

### SITUACIONES AERONÁUTICAS

Se sugiere un trabajo grupal en las siguientes actividades.

- ¿Cómo establecer la distancia entre un punto  $P$  y una recta  $g$ , en el contexto de distancias de seguridad de una avioneta en la fase del despegue?
  - Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
  - En el siguiente dibujo, una avioneta está despegando desde un aeródromo para ir a un pueblo. Se quiere saber la diferencia, en distancia, entre la avioneta y la punta de una torre en el momento en que la nave sobrevuela la torre.



- c. Determinen la distancia entre la avioneta y la punta  $S$  de la torre, con los siguientes datos del vuelo referidos al sistema cartesiano 3D de coordenadas. Las coordenadas de los puntos representan unidades de 100 m. La siguiente información es importante para la situación:
- El lugar del despegue está en el punto  $D(2; 2; 0)$ .
  - El vector director de la recta  $g$  que representa la trayectoria del vuelo, es  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - El lugar de la punta de la torre es  $S(1, 6, 0.5)$ .
2. ¿Cómo saber la distancia de dos rectas que se cruzan en el espacio sin tener intersección? Empleen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra 3D.
- Consideren las siguientes rectas  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ , y  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ .
  - Verifiquen que las rectas se cruzan sin intersección.
  - Determinen la distancia entre las rectas. Discutan en el grupo y expliquen su procedimiento.

## SUPERVISIÓN DEL ESPACIO AÉREO

¿Cómo modelar situaciones de supervisión del espacio aéreo? Supongan que hay en el espacio aviones todavía en la fase del despegue, otros en la fase del descenso y otros que están volando horizontalmente dentro de su altura, asignada por la supervisión aérea. Hay distancias de seguridad para vuelos cuyas trayectorias se cruzan en el espacio. La foto muestra un cruce de dos aviones, representados por los rayos de condensación.



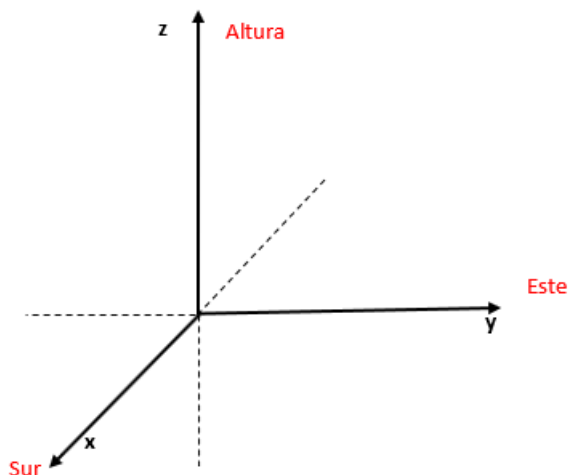
El sistema de coordenadas en tres dimensiones relaciona los tres ejes con los puntos cardinales y la altura sobre el nivel del mar. El Este y el Oeste con el eje Y, el sur y el norte con el eje X y sobre o bajo el nivel del mar con el eje Z. Hay dos aviones  $A_1$  y  $A_2$  en el espacio aéreo, cuyos vuelos en el mismo instante tienen los siguientes datos en kilómetros con relación al punto  $(0; 0; 0)$

Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OA c, 3° y 4° medio

Avión  $A_1$ : Ubicación en el lugar  $P(30; -40; 8)$ , dirección del vuelo horizontal hacia el NE.

Avión  $A_2$ : Ubicación en el lugar  $Q(20; 50; 8.5)$ , dirección del vuelo horizontal hacia el NO.

1. Ubica los aviones en el sistema de coordenadas 3D.



- Suponiendo que ambos aviones tengan la misma velocidad, la situación se puede modelar en forma netamente geométrica. Conjeturen acerca de una eventual colisión entre ambas naves si mantienen sus trayectorias. Discutan en el grupo y expliquen su hipótesis.
- Elaboren la ecuación vectorial que representa la trayectoria de cada vuelo.

- c. Determinen el lugar de colisión o de cruce y, en el caso de un cruce, la distancia vertical entre los aviones. Discutan y expliquen su procedimiento.
- d. Verifiquen y representen los resultados con algún programa de geometría digital.
2. En otra situación en el espacio aéreo, un avión  $A$  está en el lugar  $R(3; 2; 1)$  volando en línea recta con el vector  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , que está ascendiendo. Otro avión  $B$  está en la fase del descenso y se ubica en el lugar  $Q(-6; -5; 7)$ , volando también en línea recta con el vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- a. Determinen la distancia  $d$  entre los aviones en el momento en que se cruzan. Discutan y expliquen su procedimiento.
- a. Verifiquen y representen los resultados, usando GeoGebra 3D.
- b. ¿Es posible que establecer si puede haber o no una colisión de aviones, por medio de una fotografía en dos dimensiones? Discutan y expliquen su argumento.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere que los estudiantes utilicen la herramienta GeoGebra 3D para desarrollar y verificar sus resultados. Aunque varios de los problemas planteados podrían resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello; por ende, se prefiere que busquen caminos alternativos con apoyo tecnológico.
- Conviene que usen las herramientas de GeoGebra 3D para determinar distancias, módulos y ángulos entre vectores; aun así, cabe recordar cómo se aplica el teorema de Pitágoras. En las actividades, el ángulo entre vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se limita a vectores directores de rectas que tienen un punto común.
- Cuando necesiten saber la distancia entre un punto y un plano, se sugiere que discutan y elaboren una estrategia, a partir de las herramientas que tiene el programa de geometría dinámica.
- Hay que enfatizar en cuáles son las posibilidades de posiciones relativas entre dos rectas, en el espacio coordinado 3D: cortarse, ser paralelas o cruzarse a una cierta distancia entre ellas.
- En la actividad contextualizada, se recomienda centrar la atención en cómo la desarrollan, más que en si obtienen un resultado específico. Aquí valen las conjeturas, las propuestas y la diversidad en la búsqueda de soluciones.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
  - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.
  - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Formulario de vectores  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://calculo.cc/temas/temas\\_geometria\\_analitica/vectores\\_escalar/teoria/form\\_vec.html](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/vectores_escalar/teoria/form_vec.html)
- Producto escalar de dos vectores  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.calculadoraconvertidor.com/producto-escalar-de-dos-vectores/>