Actividad 3: Determinar la intersección de rectas con planos y de planos con planos

PROPÓSITO

Los estudiantes determinan la intersección entre plano y recta y entre dos planos en el espacio, con ecuaciones vectoriales. Reflexionan acerca de la intersección entre dos planos y plano y recta, a partir de las posibilidades del conjunto “solución de sistemas de ecuaciones lineales”. Se espera que usen herramientas digitales para verificar y visualizar los resultados obtenidos mediante el cálculo simbólico y para facilitar la resolución de problemas geométricos más complejos.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

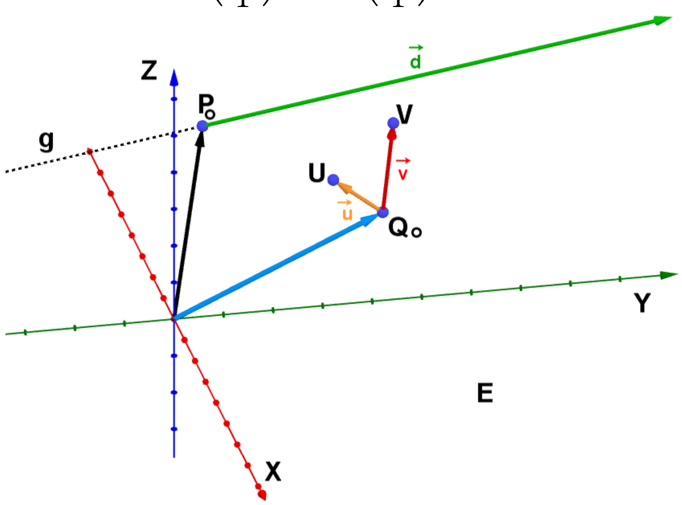
INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS Y RECTAS

Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

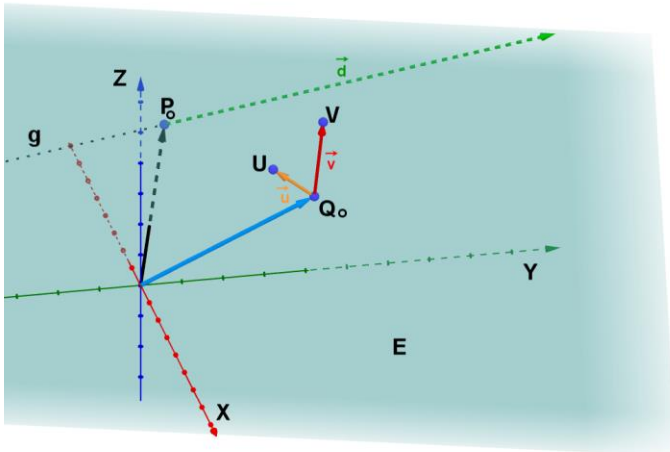
1. ¿Cómo determinar la intersección entre una recta y un plano? Si se tienen las ecuaciones vectoriales de una recta y un plano: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ y $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la intersección entre la recta g y el plano E? Usa GeoGebra 3D para encontrar esta intersección.

   a. Construye la recta g. Define en GeoGebra 3D el vector posición $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, el vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Obtén la recta g con la herramienta "Recta paralela", considerando P_0 y $\vec{d}$.

   b. Construye el plano E. Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



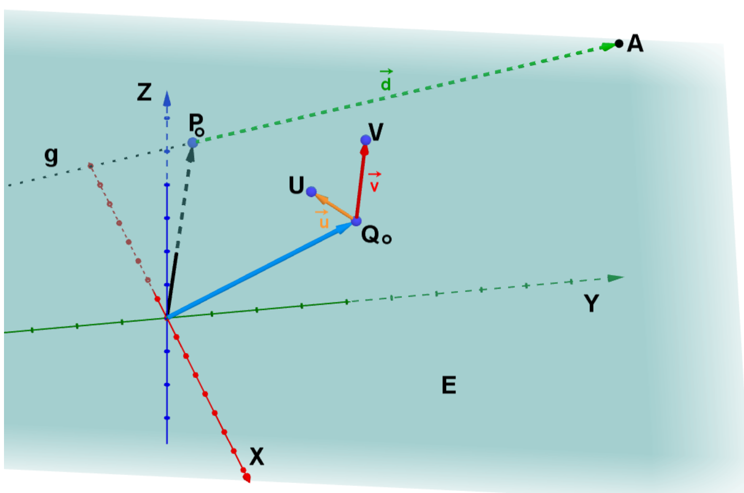
c. Obtén el plano E con la herramienta "Plano por tres puntos", considerando U, V y Q_0.



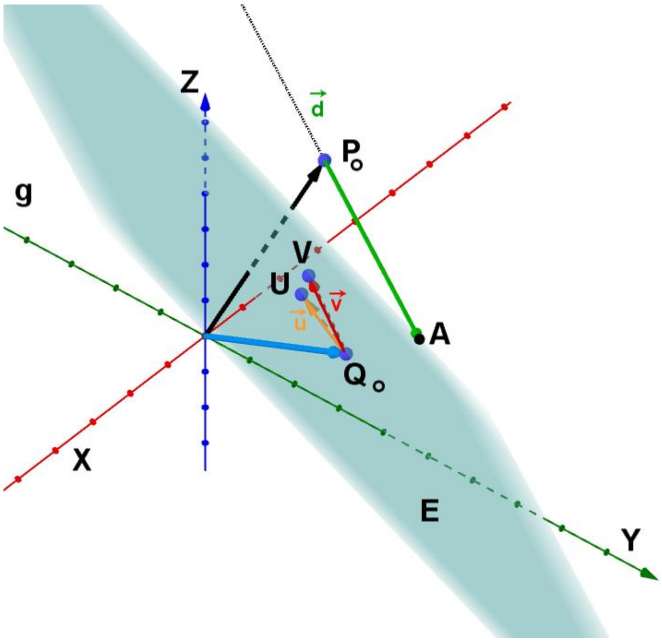
d. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de "rotación" del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano E con la recta g. ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos?

e. Con la herramienta "intersección de objetos", verifica la intersección de g y E. Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:

____



f. Utilizando la herramienta de "rotación" del sistema coordenado 3D, verifica el conjunto solución.



g. Finalmente, ¿de qué manera se puede encontrar la solución anterior mediante procedimientos algebraicos?

2. Considera ahora que una recta h tiene la ecuación $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ y el mismo plano anterior $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$.

a. Conjetura si la recta h intersecta o no el plano E.
b. Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
c. ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?

3. Considera que otra recta l tiene la ecuación $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ y el mismo plano anterior E.

a. Conjetura si la recta h intersecta o no el plano E.
b. Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
c. ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?

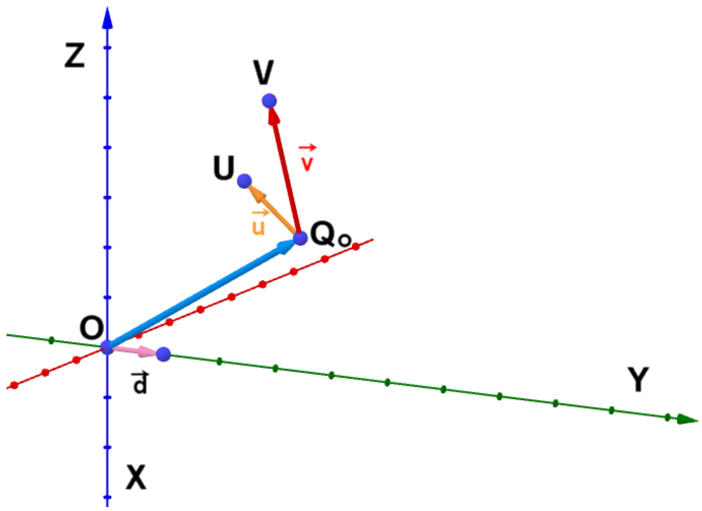
4. ¿Cómo determinar la intersección de un plano con los ejes de coordenadas? Por ejemplo: encuentra la intersección del Plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$, con el eje Y.

a. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que representa el eje Y. Identifica el vector posicional y el vector director en este caso:

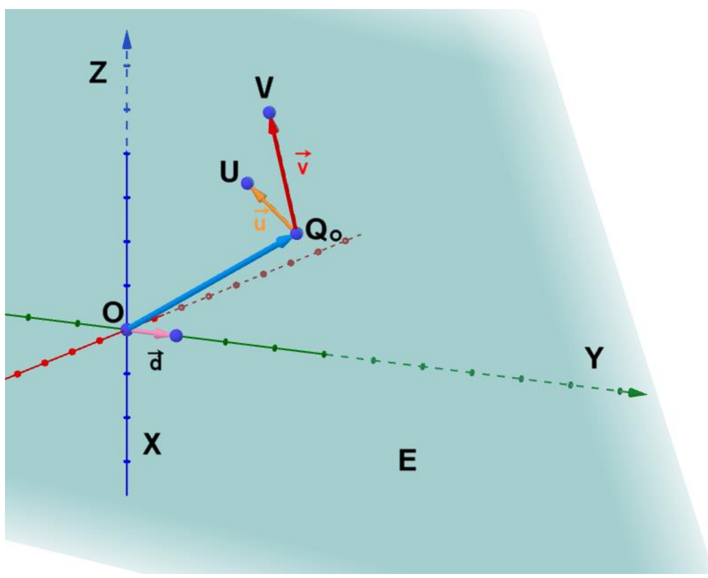
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

b. Identifica en GeoGebra 3D, la recta que representa el eje Y.

c. Construye el plano E. Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

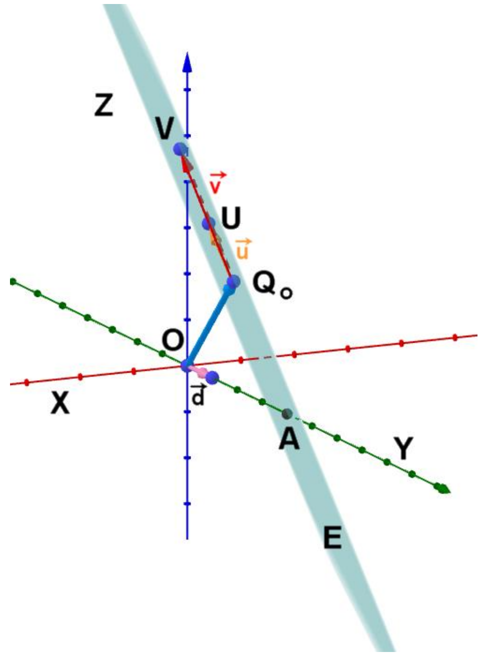


d. Obtén el plano E con la herramienta "Plano por tres puntos", considerando U, V y Q_0.



e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de "rotación" del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano E con la recta g. ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.

f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D "intersección de objetos", verifica la intersección del eje Y con E. Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:



g. ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?

h. Encuentra la intersección del plano E con las rectas asociadas a los ejes X y Z. Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS

1. ¿Cómo determinar la intersección entre dos planos? Considera el plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$, y el Plano XY.

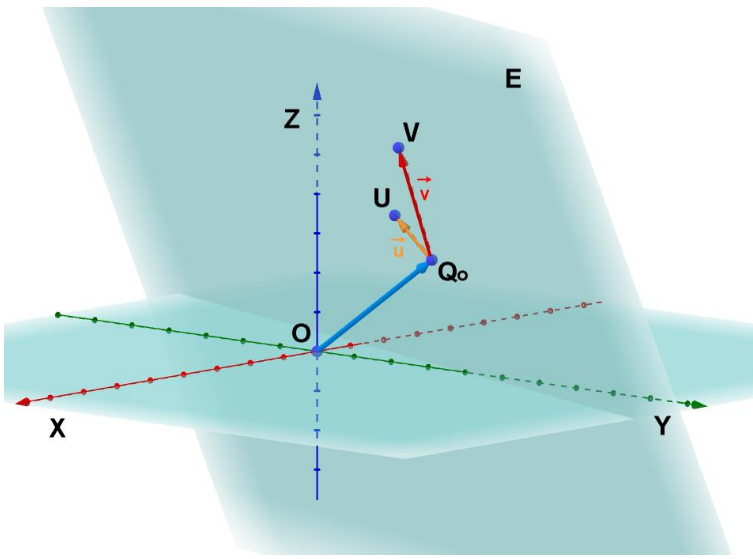
a. Escribe la ecuación paramétrica del Plano XY. Identifica el vector posicional y los dos vectores directores en este caso:

$$\text{Plano } XY\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b. Construye el plano E. Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Construye el plano XY. Define en GeoGebra 3D el vector posición $O = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$.

d. Obtén los planos E y XY con la herramienta "Plano por tres puntos", considerando los vectores posicionales y los vectores directores.

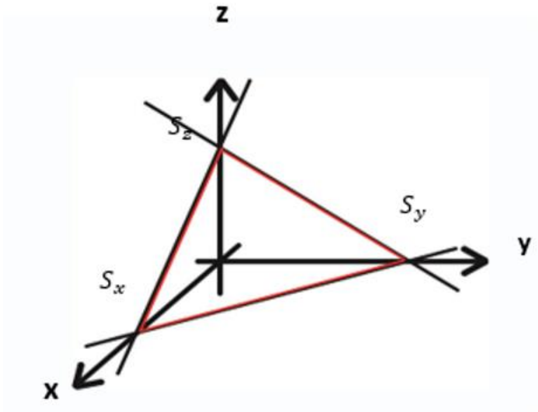


e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de "rotación" del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección de los planos E y XY. ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.

f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D "intersección de objetos", verifica la intersección de los planos E y XY y contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el conjunto solución: __________________________.

- ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
- Encuentra la intersección del plano E con los otros planos XZ e YZ. Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

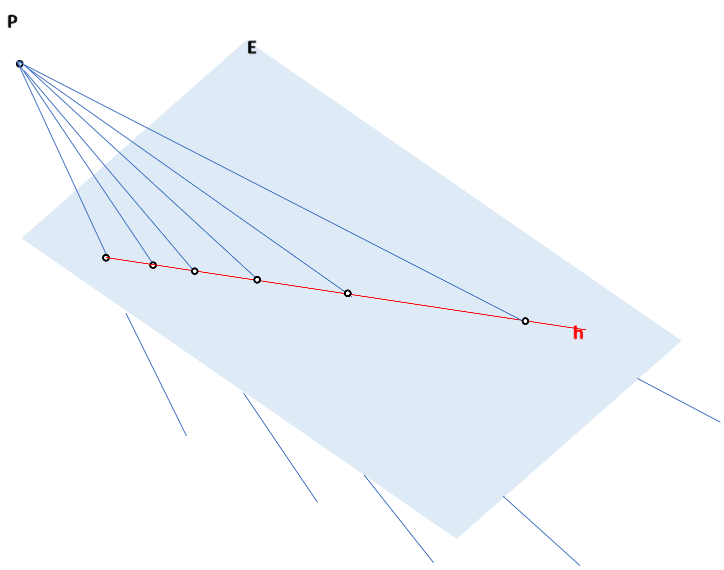
2. Encuentra la intersección del plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $k, l \in \mathbb{R}$, con cada uno de los planos XY, XZ e YZ, de forma algebraica.



3. Usa algún programa de geometría dinámica para encontrar las soluciones de la intersección del plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $k, l \in \mathbb{R}$, con cada uno de los planos XY, XZ e YZ, y compara con lo obtenido en el ejercicio anterior.

UNA SITUACIÓN CIENTÍFICA DE OCEANOGRAFÍA Y EL HAZ DE RECTAS EN EL ESPACIO

1. Un haz de rectas g_a que pasa por un punto P, intersecta un plano E en varios puntos. Determinen la recta h que une los puntos de intersección de g_a con E.

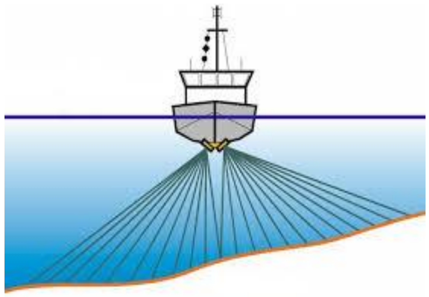


Para cada valor del parámetro a, se define una recta g_a mediante la siguiente ecuación vectorial $g_a: \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4+2a \\ -1+5a \\ 1+3a \end{bmatrix}$; $r, a \in \mathbb{R}$. El plano E tiene la ecuación vectorial de

$$E: \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} con\ k, l \in \mathbb{R}.$$

Determinen una ecuación vectorial de la recta h que une los puntos de intersección en el plano E. Utilicen alguna herramienta digital como apoyo.

2. Modelar el rastreo del fondo marino, hecho con ecosondas abanicas como se muestra en la imagen adjunta.

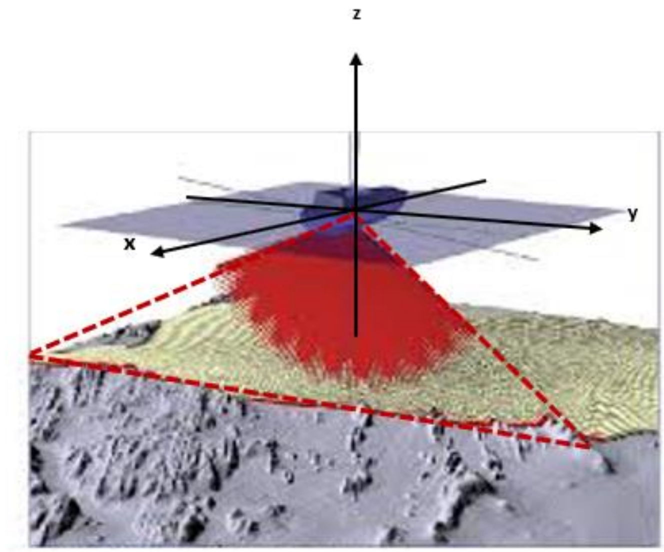


Un barco científico está investigando la profundidad del mar para elaborar un mapa que represente el perfil del fondo marino, y que sirva tanto para la pesca como para la navegación. Las ecosondas ubicadas en la parte inferior del barco emiten un haz de rayos ultrasónicos que forman un triángulo espacial. El barco está registrando el borde superior de una fosa submarina en el fondo submarino.

a. Modelen la situación con un haz de rectas que pasa por un punto bajo los siguientes supuestos:
   - El centro del sistema cartesiano 3D de coordenadas se encuentra en el emisor de los rayos ultrasónicos.
   - El dibujo es esquemático y las dimensiones del barco no están en relación con la profundidad del mar y otras extensiones reales.
   - El plano que está representado por el haz de rectas no está paralelo a plano alguno de coordenadas.
   - El fondo submarino está paralelo a la superficie del mar y se conoce la profundidad del fondo del mar. (Estimar libremente).
   - El borde de la fosa submarina tiene la forma de una recta y se extiende más por ambos lados del segmento que se investiga.

Conexión interdisciplinaria: Ciencias para la Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio

b. Con herramientas digitales, elaboren una ecuación del haz de rayos.



a. Según los datos de la modelización, determinen la ecuación vectorial de la recta que representa el borde de la fosa.

b. ¿Por qué se puede modelar las ecosondas con forma de abanico, con ecuaciones vectoriales de planos?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En primera instancia, se propone que usen GeoGebra 3D en las actividades, como una manera visual y dinámica de comprender los conceptos asociados a rectas y planos. Se sugiere discutir después algunos métodos algebraicos relacionados con sistemas de ecuaciones.
2. GeoGebra 3D entrega directamente la ecuación paramétrica de una recta en el sistema coordenado 3D, pero no lo hace directamente en el caso de los planos, pues entrega la ecuación cartesiana. Por ello, conviene que los estudiantes construyan paso a paso la ecuación paramétrica, considerando el vector posicional y los dos vectores directores.
3. Para establecer la intersección de un plano con los ejes de coordinadas, en la actividad 4, los alumnos deben verificar que las rectas que pasan por los pares de puntos S_x, S_y; S_x, S_y y S_y, S_x, determinan las rectas de intersección.
4. Se sugiere dar más espacio para que desarrollen la intersección entre rectas y planos, considerando sus ecuaciones paramétricas. No se pone mucho énfasis en la intersección de dos planos en posición relativa general entre ellos; en cambio, se prefiere trabajar exclusivamente en la intersección de un plano cualquiera con los planos XY, XZ e YZ.
5. Las rectas del haz determinan un plano común y la recta h representa la intersección de este plano con el plano E. Para determinar la ecuación de la recta h, es suficiente establecer dos puntos de ella, que resultan de la intersección con dos rayos.

6. Para determinar la intersección del haz de rayos con el fondo marino, basta con calcular la intersección de dos rayos con el fondo marino.
7. En esta actividad, el énfasis está en la modelización y no en un resultado definido. Por esta razón, se supone un fondo marino plano y de dirección horizontal, para que los cálculos simbólicos no tengan tanta exigencia matemática.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
    - Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos *XY*, *XZ* e *YZ.*
    - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, mediante representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Rectas y planos
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/simbolico/geometria/geometria.html

- Rectas en el espacio
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/SUPERIOR/algebra-vectorial-planos-rectas/node5.html

- Ecuación vectorial
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ematematicas.net/ecrectaespacio.php?a=6

- Recta y plano: intersecciones y ángulos
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-y-plano-intersecciones-y-angulos/

- Proyecto de inspección con sonar de barrido lateral y levantamiento topográfico
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/mgd/carvajal_r_jo/capitulo6.pdf