Actividad 2: Rectas y planos en el espacio

PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes caractericen planos y rectas en el sistema 3D mediante sus diferentes ecuaciones y los representen gráficamente en forma manual y con herramientas digitales. Además, se espera que modelen situaciones mediante intersecciones de rectas y de planos, y que trabajen colaborativamente para resolver problemas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

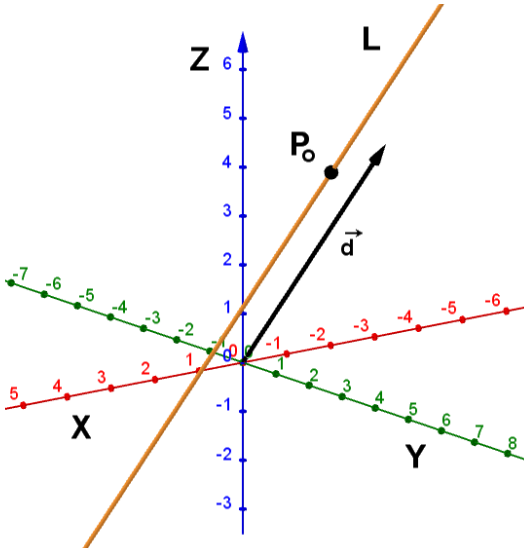
ECUACIONES VECTORIALES DE RECTAS EN EL ESPACIO

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Considerando un punto $P_0(1, 4, 5)$ de una recta L y un vector director $\vec{\boldsymbol{d}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, determinen una ecuación vectorial de la recta L.
   a. Ingresen el punto $P_0 = (1;\ 4;\ 5)$ en GeoGebra 3D.
   b. A continuación, definan el punto $D = (-1;\ 3;\ 5)$.
   c. Establezcan ahora el vector $\vec{\boldsymbol{d}}$ asociado al punto D como “Vector (D)”.

d. Usando la herramienta “recta paralela por un punto y según dirección de un vector” de GeoGebra 3D, determinen la recta L que pasa por $P_0 = (1;\ 4;\ 5)$ y que sea paralela al vector $\vec{\boldsymbol{d}}$.

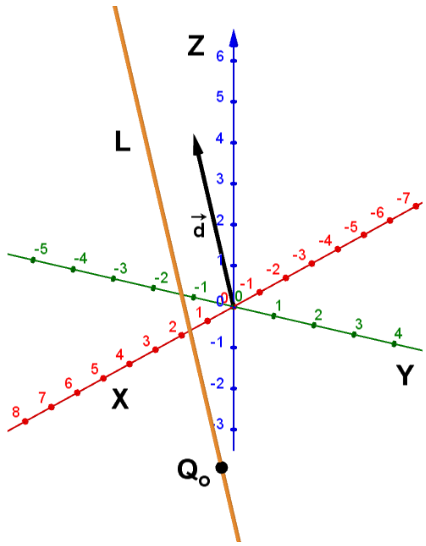


e. ¿Cuál es la ecuación que GeoGebra 3D asigna a L? Completen:

$$(x;\ y;\ x) = (\quad;\quad;\quad) + \lambda\,(\quad;\quad;\quad)$$

f. ¿Qué representa el factor λ asociado al vector director $\vec{\boldsymbol{d}}$? Discutan en el grupo y argumenten la respuesta.

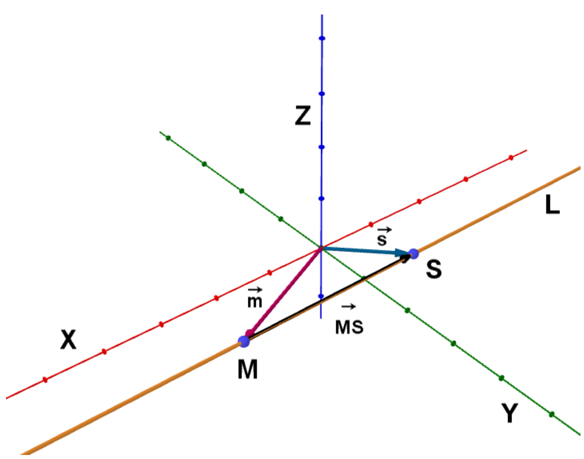
2. Según lo anterior, ¿cuál sería la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q_0(2{:}\ 1;\ -3)$ de una recta L y un vector director $\vec{\boldsymbol{d}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$? Completen $(x;\ y;\ z) = (\quad;\quad;\quad) + \lambda\,(\quad;\quad;\quad)$ y comprueben con GeoGebra 3D.



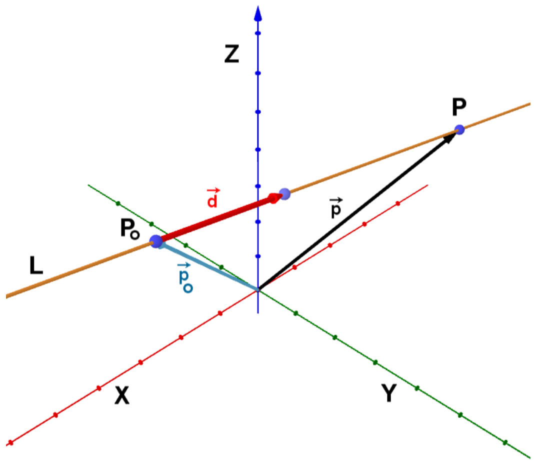
3. ¿Cuál sería la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $M(3;\ 2;\ 1)$ y $S(-1;\ 1;\ 0)$?
   a. Determinen las coordenadas del vector $\overrightarrow{MS}$. Discutan la forma de hacerlo.
   b. Tomen como vector director $\overrightarrow{MS}$ y uno de los puntos; por ejemplo: $M(3;\ 2;\ 1)$.
   c. A continuación, anoten la ecuación vectorial de la recta:

$$(x;\ y;\ z) = (\quad;\quad;\quad) + \lambda\,(\quad;\quad;\quad)$$

   d. Comprueben su resultado con GeoGebra 3D. Consideren los vectores posicionales para $M(3;\ 2;\ 1)$ y $S(-1;\ 1;\ 0)$. Discutan cómo, en el gráfico, el vector director $\overrightarrow{MS}$ coincide en dirección con la recta L y cómo este vector se define a partir de los vectores posicionales de M y S.



4. Desarrollen la ecuación vectorial de una recta en el espacio, según la imagen de abajo. Discutan en el grupo y argumenten la forma en que la hicieron.



a. Con la recta L, el punto fijo $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, el vector director definido $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ y el punto $P(x;\ y;\ z)$, que resulta cuando se da un cierto valor al parámetro λ, determinen en general la ecuación vectorial de la recta L:

$$(x;\ y;\ z) = (\quad;\quad;\quad) + \lambda\,(\quad;\quad;\quad)$$

$$P = \_\_\_\_\_\_\_ + \lambda\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b. Con referencia a la imagen anterior, ¿cuál es aproximadamente el parámetro λ mediante el cual se logra la traslación del punto P_0 al punto P? En otras palabras, ¿por cuánto hay que multiplicar al vector director? Discutan en el grupo y redacten su respuesta.

c. Considerando la ecuación vectorial de la recta L que pasa por el punto $Q_0\ (1;\ 4;\ 5)$ y el vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ¿qué vector posicional $\vec{u}$ de un punto U se genera, reemplazando el parámetro $\lambda = -2$ en la ecuación vectorial de dicha recta L? ¿Cuáles son las coordenadas del punto U? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.

d. ¿Mediante cuál parámetro λ se genera el vector posicional $\vec{w}$ que traslada el punto $Q_0\ (1;\ 4;\ 5)$ al punto $W(-3;\ 16;\ 25)$? Argumenten.

ECUACIONES VECTORIALES DE PLANOS EN EL ESPACIO

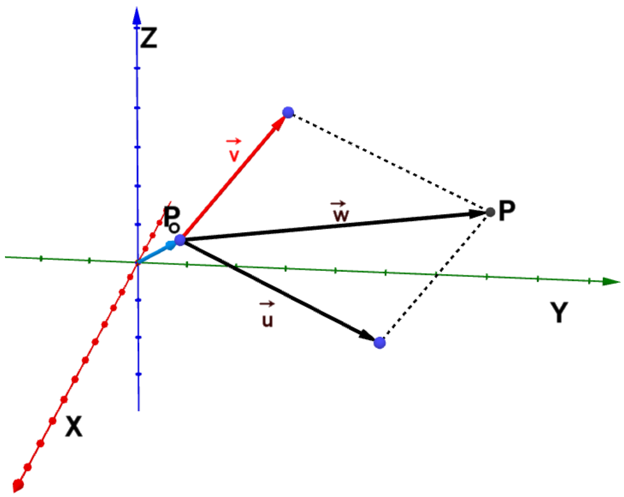
1. Imagina que el punto $P_0(1;\ 1;\ 1)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenecen al plano F.

   Determinen una ecuación vectorial del plano F. Usen GeoGebra 3D.

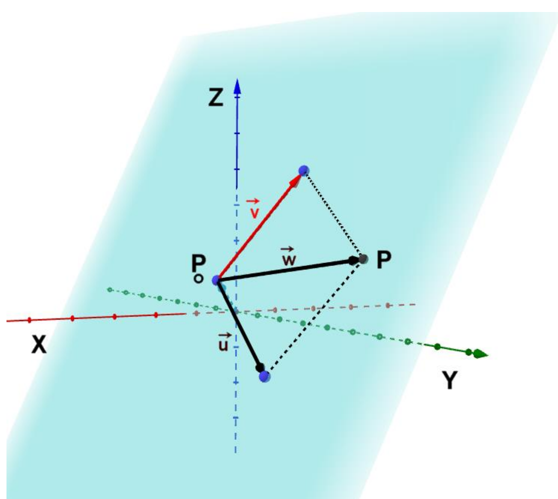
   a. Ubiquen el punto P_0 en el sistema coordenado 3D.

   a. A continuación, proyecten los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ desde el punto P_0.

   b. Establezcan la resultante de la suma entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



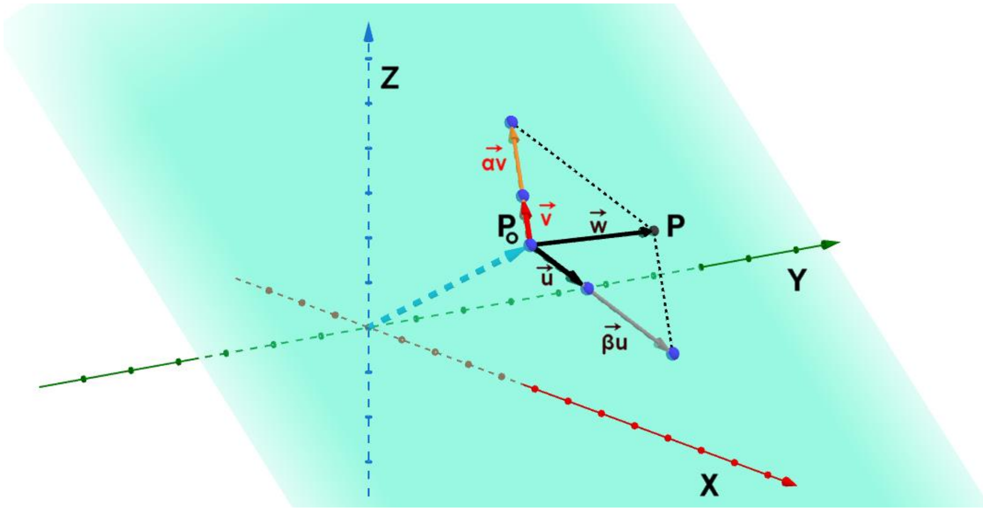
   c. Marquen el punto P encontrado. ¿Pertenece al Plano F? Discutan con el grupo. Verifiquen con GeoGebra y la opción "Plano por 3 puntos".



   d. ¿Qué sucede si se multiplica los vectores por escalares α y β, respectivamente? ¿Qué significan las expresiones $\alpha\vec{u}$ y $\beta\vec{v}$?

   e. ¿Se podría encontrar otros puntos pertenecientes al mismo plano F? ¿Por qué?

2. Desarrollen la ecuación vectorial de un plano en el espacio, a partir de un punto P perteneciente al plano y dos vectores de traslación dados, según la imagen de abajo.



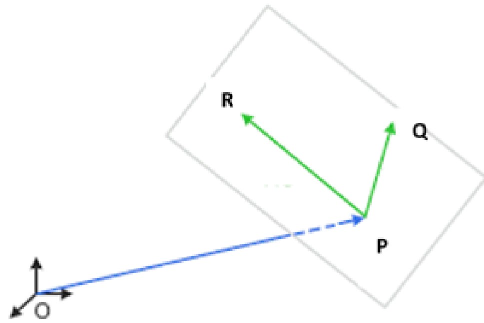
a. El punto $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ pertenece a un plano E y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan traslaciones de puntos en E. Si un punto cualquiera $P(x, y, z)$ también pertenece al plano E, determinen una ecuación vectorial del plano E a partir de la información anterior.

b. El punto $P(1;\ 3;\ 2)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ pertenecen al plano F. Determinen una ecuación vectorial del plano F.

c. Determinen el punto Q del plano F para los parámetros $\alpha = -1$ y $\beta = 2$.

d. Un plano H tiene la ecuación vectorial $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Verifiquen si el punto $A(-1; -3;\ -1)$ pertenece al plano H.

3. ¿Cómo obtener la ecuación vectorial de un plano en el espacio 3D, a partir de tres puntos que pertenecen a él?



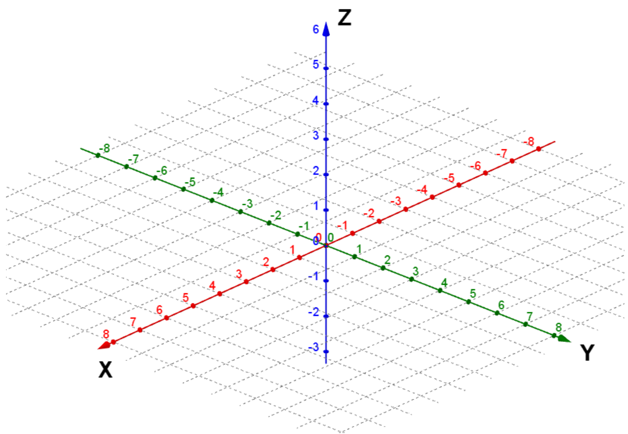
a. Desarrollen una ecuación vectorial según la imagen anterior.

b. Confeccionen un dibujo esquemático con el vector posicional del punto P y desarrollen una ecuación vectorial del plano. Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.
c. Dados los tres puntos $A(2;\ 0\ ;\ 3)$, $B(1;-1;\ 5)$ y $C(3;-2;\ 0)$ que pertenecen a un plano E, determinen dos ecuaciones de E con diferentes vectores posicionales elegidos. ¿Es posible hacerlo? ¿Por qué? Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.

4. ¿Cómo se obtiene la ecuación vectorial de un plano en el espacio, cuando se tiene tres puntos especiales?

   a. Si a es un número real, razonen acerca de la ubicación de los siguientes puntos en el sistema cartesiano 3D: $A(0;a;\ 0)$, $B(0;a;a)$ y $C(a;\ a;\ 0)$, y describan el plano que determinan.

   b. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, marquen los puntos $K(4;\ 0;\ 0)$, $L(0;\ 4;\ 0)$ y $M(0;\ 0,4)$, y desarrollen una ecuación vectorial del plano E al que pertenecen estos puntos.



   c. ¿Qué características deberían tener tres puntos P, Q, y R que pertenecen a un plano F paralelo al plano *E*? Discutan con el grupo y elaboren una respuesta.

SITUACIONES MODELADAS POR RECTAS Y PLANOS

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

1. ¿Cómo enfrentar situaciones que involucran planos con características especiales en el sistema cartesiano 3D de coordenadas? Elaboren un dibujo esquemático para cada actividad.

   a. ¿Qué plano representa la siguiente ecuación vectorial? $\vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}\ s,t \in \mathbb{R}$.

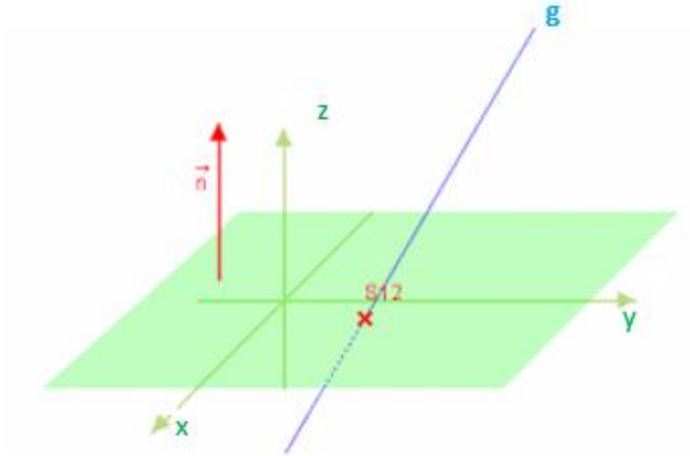
      Argumenten la respuesta con una imagen esquemática.

   b. Elaboren una ecuación vectorial de un plano paralelo (no idéntico) al “plano xz” del sistema cartesiano 3D de coordenadas. Expliquen el procedimiento.

   c. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al “plano xy” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de tres unidades. Expliquen el procedimiento.

   d. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al plano “yz” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de cinco unidades. Expliquen el procedimiento.

2. ¿Cómo determinar intersecciones de rectas con planos paralelos a los “planos de coordenadas”? ¿Qué características poseen estas intersecciones?

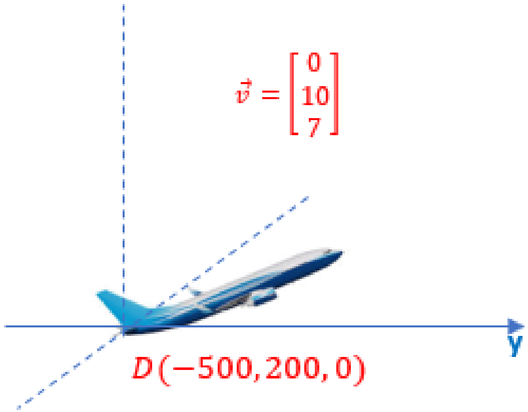


   a. Determinen el punto S de intersección de la recta g con la ecuación $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, t \in R$ y el “plano de coordenadas xy”. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano en su forma más sencilla).
   b. Determinen el punto T de intersección de la recta g con un plano paralelo al “plano de coordenadas xy” en la distancia de cinco unidades. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano paralelo en su forma más sencilla).

3. Modelar situaciones de seguridad en el transporte aéreo, mediante intersecciones de rectas geométricas con planos geométricos que están paralelos a los “planos de coordenadas”.

   En el dibujo esquemático a continuación, se muestra un avión en el momento del despegue. Las coordenadas del punto *D* del despegue, medidas en metros, se refieren a un sistema de coordenadas cuyo origen O es la torre del aeropuerto. El vector $\vec{v}$ de la dirección del vuelo también se refiere a metros y la dirección del eje y está de norte a sur.



Conexión interdisciplinaria: Ciencias para la Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio

a. En una altura de 3 000 m, el avión pasa las nubes y entra en un espacio aéreo despejado. Determinen este lugar *L* en referencia al sistema de coordenadas cuyo origen es la torre.
b. En esta fase del vuelo, se considera un movimiento rectilíneo uniforme ("MRU"). ¿Cuál es el largo del desplazamiento al pasar por el punto *L*?
c. En otra fase del vuelo, el avión ya está en una altura de 5 000 m y vuela con velocidad constante en una dirección representada por el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. El avión debe pasar por una cordillera de altura máxima de $5\ 000\ \mathrm{m}$, que se extiende en la dirección norte-sur (paralela al eje y). Como control de altura, la nave debería pasar un plano paralelo al plano yz, que se extiende a una distancia de $3\ 000m$ del avión. Pasando este plano, sigue volando horizontalmente en dirección oeste- este.
   a. ¿Con qué distancia de seguridad, en cuanto a la altura, el avión pasará la cordillera?
   b. Confeccionen previamente un dibujo esquemático para representar y resolver el problema.
   c. ¿Por qué la intersección de rectas con planos paralelos a los planos de coordenadas debe anteceder a la intersección con planos inclinados?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere tratar las situaciones en detalle y con varios ejemplos, ya que es la primera vez que los jóvenes trabajan de manera integrada con ecuaciones vectoriales de rectas y planos. Conviene que los parámetros usados correspondan a los números reales.
2. En cuanto a la contextualización con los vuelos de aviones, las ecuaciones vectoriales geométricas son un modelo de las ecuaciones de movimientos rectilíneos uniformes "MRU".
3. Se recomienda emplear herramientas digitales como GeoGebra para que exploren las representaciones que, en general, requieren mucha imaginación espacial. También deben adquirir destreza para confeccionar dibujos esquemáticos, elaborar ecuaciones vectoriales y determinar simbólicamente conjuntos de intersección entre rectas y planos.

4. Para facilitar la elaboración de las ecuaciones vectoriales, se recomienda elegir un sistema de coordenadas en el cual el punto $P(0;\ 0;\ 5\ 000)$ representa la posición del avión que debe pasar por plano paralelo al plano yz.
5. Para resolver los problemas por métodos algebraicos, finalmente trabajan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de hasta 3x3. No obstante, el énfasis está principalmente en el trabajo visual con apoyo de GeoGebra 3D.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.
   - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Ecuación vectorial
  https://www.curriculumnacional.cl/link/*https://www.ematematicas.net/ecrectaespacio.php?a=6*
- Rectas en espacio de coordenadas 3D
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-en-r3/
- Ecuaciones de la recta en el espacio
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/ecuaciones-de-la-recta-en-el-espacio.html
- Tutoriales para trabajar ecuaciones paramétricas de rectas y planos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=Xu7NsHs9Z9A
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=CkDxFjGOfBg