

Actividad 4: Aproximar la distribución binomial por la distribución normal

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen aún más en el uso y el aporte de las distribuciones de probabilidad para modelar fenómenos cotidianos. También se pretende que usar la distribución normal como aproximación de la distribución binomial, parece un mejor camino según las condiciones del problema. En esta oportunidad, se propone que descubran por qué la técnica que ya han usado es válida y cómo, en términos generales, se debe ajustar un modelo matemático para adecuarse a los requerimientos de lo que pretende modelar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

APROXIMANDO UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL MEDIANTE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

¿Eres feliz? No siempre es fácil responder esta simple pregunta, pues cada persona tiene su propia idea de lo que es la felicidad; además, nuestras concepciones al respecto van cambiando constantemente, sobre todo a medida que pasan los años. En 2019, *Activa Research* y *WIN* publicó los resultados de una investigación que buscaba averiguar sobre la “Felicidad en Chile y el mundo”. Los resultados mostraron que, de los 30 890 entrevistados en el mundo, el 52% se considera feliz.

En Chile, los resultados indican que, de 1 032 encuestados, el 58% se considera feliz. ¿Te parece que estos datos se acercan a lo que ocurre en tu entorno? ¿Qué tan probable será que todos los que conoces estén en ese 58%, o que no estén en ese porcentaje? ¿Qué tan probable será que, si encuestas a algunas personas, ellas sean felices?

1. ¿Qué información te aporta saber que el 58% de los entrevistados es feliz?
 - a. ¿Cómo puedes usar esta información para referirte a la población? ¿Qué restricciones debes tener en cuenta?
 - b. ¿Cómo puedes usar esta información para determinar la probabilidad de que, al elegir a una persona al azar y preguntarle si es feliz, su respuesta sea afirmativa?
2. Se entrevista a 5 personas y se les pregunta si son felices o no. Se sabe de antemano que el 58% de las personas es feliz y asumimos que el 42% no lo es.
 - a. ¿Cuál es la variable aleatoria en este caso? ¿Qué valores podría tomar?
 - b. ¿Se puede modelar esta situación con una distribución binomial? ¿En qué aportaría conocer la distribución de los datos para entender el problema? Argumenta.
3. Determina las probabilidades de los valores de la variable aleatoria si se entrevista a 5 personas.
 - a. Grafica los resultados en la Figura 1.

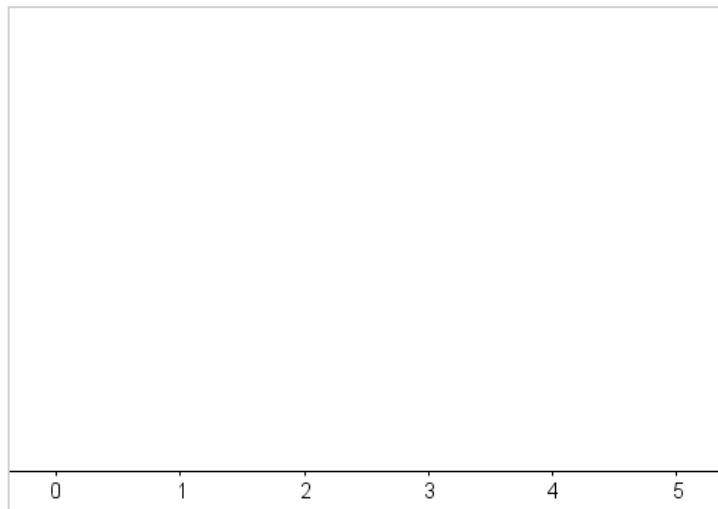


Fig. 1: Distribución de probabilidad de X cuando $n = 5$

- b. Describe la distribución de probabilidad de los datos.
 - c. Describe tu apreciación sobre lo laborioso que es determinar probabilidades usando la forma algebraica de la distribución binomial. Proyéctalo al trabajo que implica determinar probabilidades cuando la variable aleatoria sea muy grande.

4. Usando GeoGebra, determina las distribuciones de probabilidad de la variable aleatoria cuando $n = 5, n = 10, n = 50, n = 250, n = 500, n = 1000$.
- a. Puedes configurar las opciones en GeoGebra como muestra la figura 2.

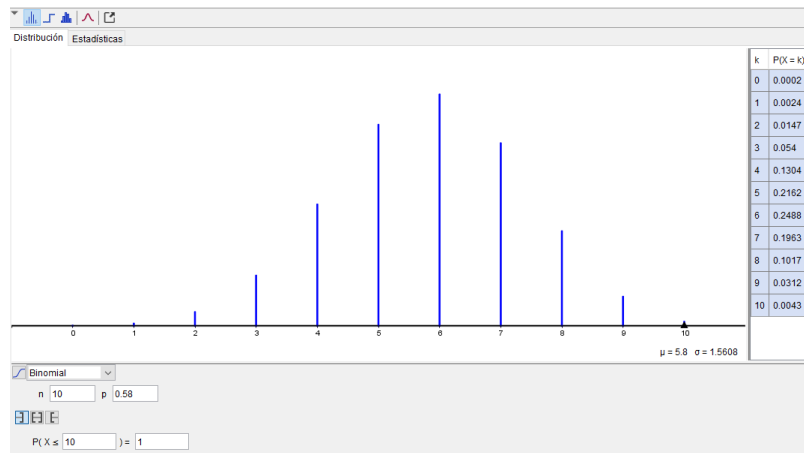


Fig. 2: Configuración en GeoGebra para determinar la distribución de probabilidad binomial

- b. Selecciona en GeoGebra la opción “Superposición de curva normal”.
- c. Bosqueja las gráficas en la figura 3 con diferentes n , según corresponda.

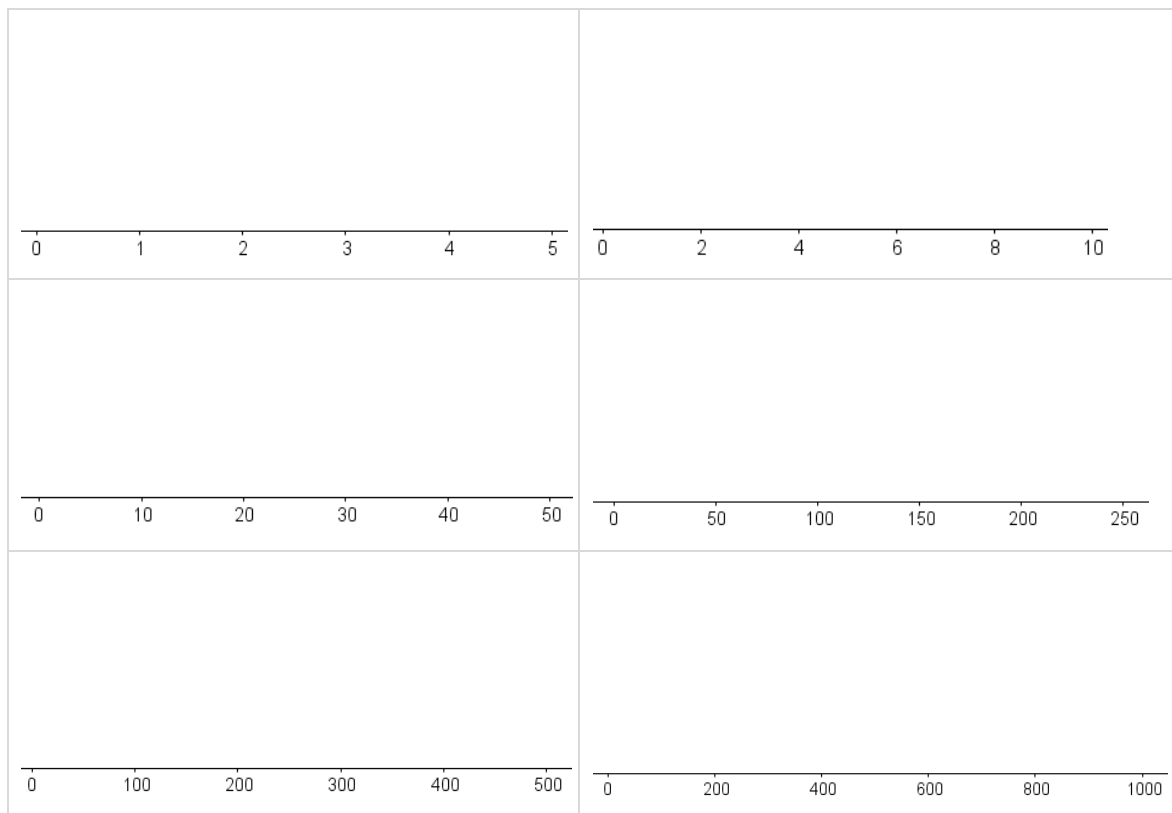


Fig. 3: Distribución de probabilidad de X a medida que n crece.

5. ¿Cómo varían las formas gráficas de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria a medida que n crece?
 - a. ¿A qué forma se acercan las gráficas a medida que n crece?
 - b. Indica a qué otra distribución de probabilidades se asemeja la distribución binomial cuando n es muy grande.
 - c. Conjetura cómo podrías usar este hallazgo para determinar probabilidades y el aporte que puede dar esta aproximación.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES MEDIANTE LA APROXIMACIÓN NORMAL DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. ¿Cuáles son los parámetros que se necesita para determinar probabilidades según cada distribución?
 - a. Indica los parámetros usados en la distribución binomial.
 - b. Indica los parámetros usados en la distribución normal.
 - c. ¿Cómo se puede determinar los parámetros requeridos en la distribución normal, usando los parámetros de la distribución binomial?
2. Usa la aproximación normal de la binomial para determinar la probabilidad de que, al elegir al azar 50 personas, 25 respondan como máximo que son felices. Registra los cálculos.
 - a. Si hubieras determinado esta probabilidad mediante la distribución binomial, ¿qué dificultades habrías tenido?
 - b. ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial? Argumenta.
3. Determina la probabilidad de que, al elegir al azar a 100 personas, exactamente 75 de ellas respondan que son felices. Argumenta.
 - a. Sin hacer los cálculos, describe cómo los harías usando la distribución binomial.
 - b. Conjetura una forma de calcular la probabilidad buscada, usando la distribución normal.
 - c. ¿Cómo puedes hacer que la variable aleatoria discreta que estás considerando sea “ajustada” para ser continua? ¿Cómo podrías crear intervalos adecuados para ello?
 - d. Elabora una regla para hacer una corrección de continuidad y compárala con las ideas de tus compañeros. Luego, en consenso, lleguen a la mejor corrección posible.
 - e. Vuelve a determinar la probabilidad pedida en el punto 2, ahora aplicando la corrección por continuidad, y compara ambos resultados.

4. ¿En qué te basarías para decidir desde qué valor de n vale la pena utilizar la aproximación normal de la distribución binomial? Argumenta.
- a. Completa la tabla 1 con la probabilidad de distintos valores de la variable aleatoria y para un n dado.

Tabla 1: Comparación de probabilidades según cada distribución de probabilidad, variando n

Distribución de probabilidad	$P(x = 3)$ $n = 5$	$P(x = 5)$ $n = 10$	$P(x = 25)$ $n = 50$	$P(x = 50)$ $n = 100$	$P(x = 125)$ $n = 250$	$P(x = 250)$ $n = 500$	$P(x = 500)$ $n = 1000$
$B(n, p)$							
$N(\mu, \sigma)$							

- b. ¿Desde qué valor de n la diferencia entre la probabilidad determinada por $B(n, p)$ y $N(\mu, \sigma)$ es más pequeña que una centésima? Argumenta.
- c. Para ese valor de n determina:
- $$n \cdot p = \underline{\hspace{2cm}}$$
- $$n \cdot (1 - p) = \underline{\hspace{2cm}}$$
- d. Prueba con algunos valores distintos de n entre 10 y 50 y analiza desde qué n las probabilidades determinadas por ambas distribuciones son muy cercanas.
- e. Conjetura una regla práctica para determinar desde qué valor de n conviene usar la aproximación normal de la binomial.
5. Vuelve a responder la pregunta: ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere vincular datos estadísticos con el cálculo de probabilidades, usando un contexto sencillo pero cercano a los estudiantes. Aunque ya deberían haber hecho esta tarea en niveles anteriores, sirve para reforzar nuevamente cómo, desde la estadística y eligiendo de forma adecuada la muestra (usando métodos probabilísticos), se puede obtener conclusiones acerca de la población, por ahora informalmente.
- Se comienza preguntando si la situación se puede modelar con la distribución binomial y qué aportaría hacerlo, a fin de que revisen los conceptos previos que esta actividad requiere y también para que se acostumbren a hacer metacognición.
- Usando algún programa, se puede comparar distintas gráficas de la distribución binomial a medida que n crece considerablemente (de 5 a 1 000) y observar cómo los datos van tendiendo a distribuirse normalmente; la herramienta de curva normal de GeoGebra ayuda a hacerlo. Deberán concluir que los datos se distribuyen normalmente cuando n es lo suficientemente grande. Si la probabilidad de éxito se aleja de 0,5, se necesita que n sea más grande para que la aproximación sea razonable. Conviene que, usando también GeoGebra, prueben con probabilidades distintas de 0,5 para notarlo.

4. En la primera actividad, se espera que usen la aproximación normal de la binomial; por eso, se les pide determinar una probabilidad que, si se hiciera con la distribución binomial, comportaría una tarea tan laboriosa que sería muy complejo cumplirla sin un recurso digital. Acá importa discutir con los alumnos sobre los aportes de las tecnologías actuales, pues hoy se puede determinar probabilidades con la distribución binomial para un n cualquiera, por grande que sea. La idea es mostrar cómo se usaría la aproximación normal si no se cuenta con dichos recursos digitales y, al mismo tiempo, que los estudiantes sepan cómo se ha ido construyendo la historia de las probabilidades, por qué antes era tan importante poder aproximar distribuciones binomiales a normales para determinar probabilidades, y por qué esto ha hecho que la distribución normal sea tan importante y estudiada con tanto detalle.
5. Las actividades siguientes buscan establecer las reglas necesarias para determinar probabilidades de datos discretos a datos continuos; por ende, se analiza la corrección por continuidad. Se recomienda hacer esta tarea más de una vez, hasta verificar que todos la comprenden. El profesor puede complementar esta parte con gráficos, ver las barras (binomial) y el histograma (normal), y discutir sobre los ajustes que se debe hacer.
6. La regla práctica –que se vincula con lo mencionado en el punto 3 sobre el valor de n y la probabilidad cercana o lejana a 0,5– se debe notar desde una tabla con distintas probabilidades determinadas, usando la distribución binomial y la normal. Si usan GeoGebra, no necesitan hacer la corrección de continuidad, pues permite determinar los valores buscados en forma inmediata. Una alternativa es usar GeoGebra solo para los cálculos con la binomial y calcular la normal a mano; así aprovechan de estandarizar y aplicar la corrección de continuidad.
7. Finalmente, más allá de todos los cálculos, se espera que los alumnos demuestren el aporte de aproximar la distribución binomial mediante una distribución normal, por lo que el docente debe propiciar una discusión al respecto.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Modelan situaciones que involucran aproximar una distribución binomial mediante el modelo normal.
 - Argumentan cuándo se puede modelar una situación o fenómeno con una distribución binomial o normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/graphing?lang=es>
- Tabla de probabilidades de distribución normal estándar (solo las 2 primeras hojas)
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_c ol_leg/ing_tec_inf_gestion/estadistica/Documentacion/Tablas/tablas2caras.pdf