

Actividad 1: Describiendo la integral definida como área bajo la curva

PROPÓSITO

El primer objetivo es que los alumnos descubran –a partir del límite de una serie de rectángulos inscritos y circunscritos del área debajo una curva– la relación entre la integral definida y la antiderivada de funciones potencia o raíz cuadrada. Se espera que comparen los resultados del trabajo colaborativo y encuentren la regularidad en la integral definida $\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]$. Se pretende que resuelvan algebraicamente para determinar las funciones de derivadas y antiderivadas. Además (en el contexto de generar energía), se busca que recuperen gráficamente el cambio de una magnitud a partir de su forma en la razón instantánea, y que descubran una regularidad entre las ecuaciones de ambas funciones: constante \rightarrow función lineal y función lineal \rightarrow función cuadrática.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

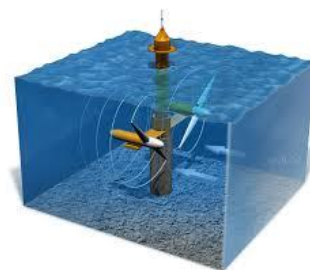
DESARROLLO

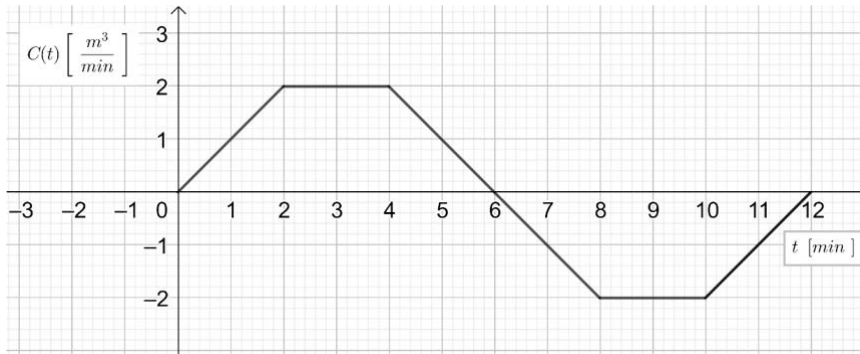
DESCRIBIENDO EL COMPORTAMIENTO DEL CAMBIO DE UNA MAGNITUD A PARTIR DE LA RAZÓN INSTANTÁNEA

1. Completa la tabla que pide determinar la ecuación de funciones f , derivada f' , f'' y posible antiderivada F , y compárala con la de tu compañero.

Posible antiderivada F	Función f	Primera derivada f'	Segunda derivada f''
	$f(x) = x^1$		
	$f(x) = a$ ($a \neq 0$)		
		$f'(x) = c$ ($c \neq 0$)	
	$f(x) = x^2$		
		$f'(x) = x^2$	
			$f''(x) = 0$
$F(x) = x^3 + x^2 + x$			
	$f(x) = \sqrt{x}$		
	$f(x) = e^x$		

2. En un laboratorio oceanográfico hidráulico se efectúa pruebas con corrientes de agua, para investigar la generación de energía eléctrica mareomotriz. En un experimento, inician la rotación de turbinas para estudiar la corriente de agua en una cámara. El gráfico representa la razón instantánea C del volumen de agua entrando en la cámara o saliendo de ella.





Conexión
interdisciplinaria:
**Ciencias para la
ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

- a. Considerando los tramos del gráfico en los intervalos $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 8]$, $[8, 10]$ y $[10, 12]$, elaboren la ecuación de la razón instantánea representada en los nuevos sistemas de coordenadas, empezando en el instante $t = 0$. Completen la siguiente tabla en sus cuadernos.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación de la razón instantánea C						

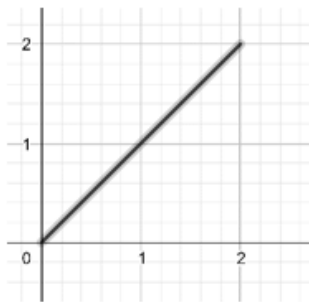


Figura 1

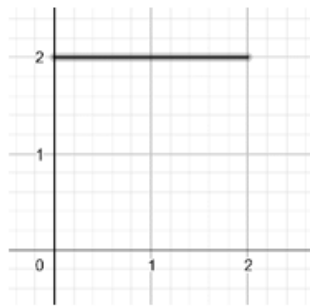


Figura 2

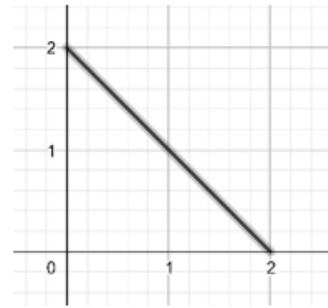


Figura 3

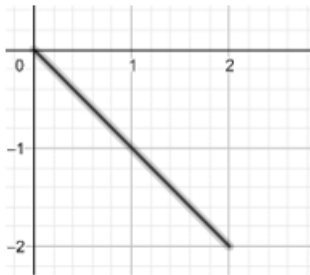


Figura 4

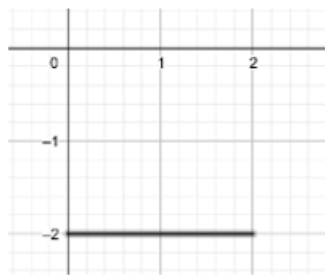


Figura 5

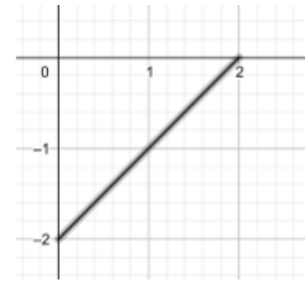


Figura 6

- b. ¿Por qué el área debajo el gráfico representa el volumen del agua que entra en la cámara o sale de ella? Compartan su respuesta con un compañero.

- c. ¿Cómo se nota en el gráfico, en qué fase entra el agua o sale el agua? Dibujen por separado sus respuestas y luego compartan las ideas.
- d. Determinen mediante el gráfico, el volumen del agua que entra o sale de la cámara según los intervalos de $[0; 2]$. Completen la tabla.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Volumen sobre $[0, 2]$						

- e. Determinen la ecuación de la función que representa el crecimiento o el decrecimiento del volumen V en la cámara. Completen la tabla.

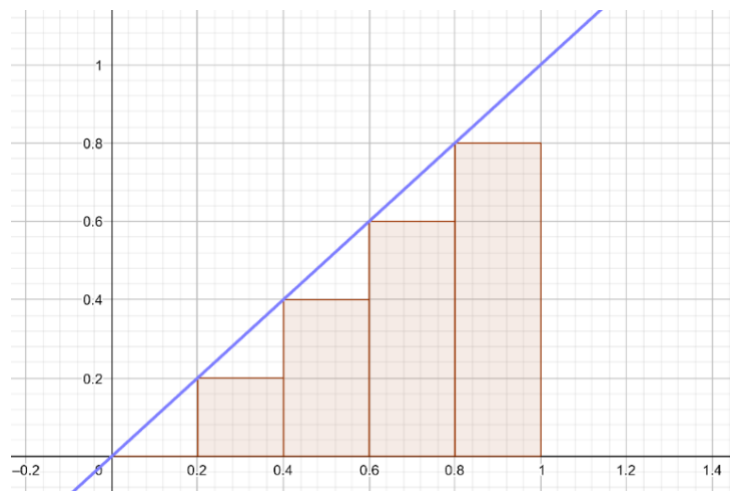
Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación del crecimiento o decrecimiento del Volumen V						

- f. ¿Qué regularidad hay entre los tipos de funciones de la razón instantánea C y el cambio del volumen V ? Expliquen su respuesta a un compañero.

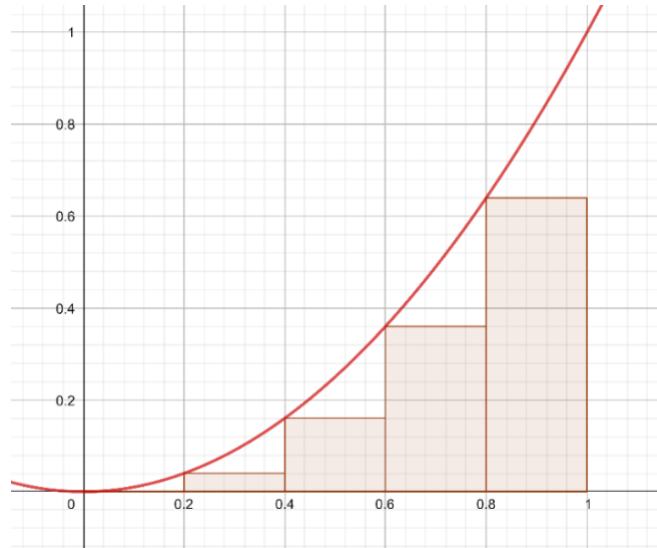
DESCUBRIENDO LA REGULARIDAD ENTRE LA FUNCIÓN QUE DELIMITA UN ÁREA Y LA FUNCIÓN QUE DETERMINA EL ÁREA BAJO EL GRÁFICO

1. A continuación, se muestra los gráficos de cuatro funciones:

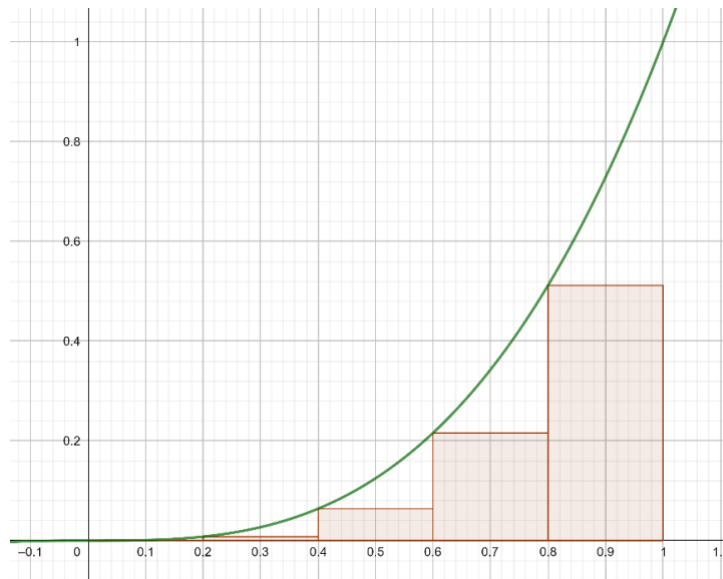
$$f(x) = x^1$$



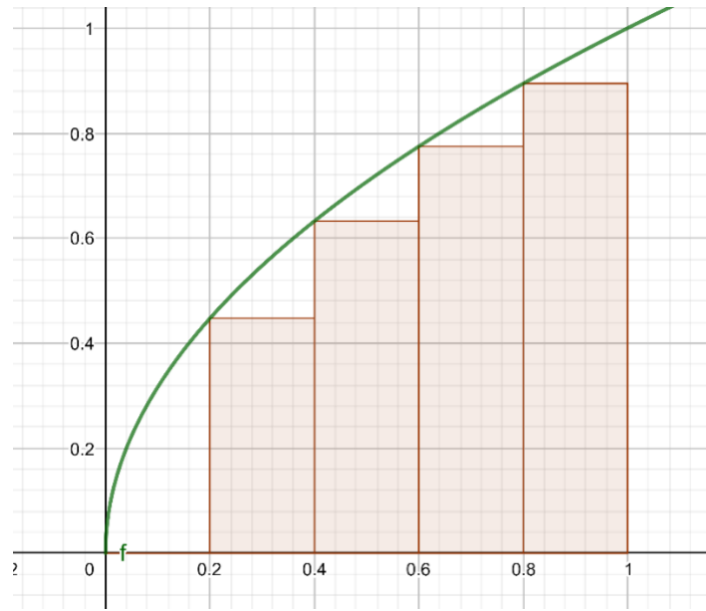
$$g(x) = x^2$$



$$h(x) = x^3$$



$$k(x) = \sqrt{x}$$



Determinen el área debajo del gráfico sobre el intervalo $[0; 1]$ para todas las funciones.

Sugerencia: aproximar una serie de áreas de rectángulos inscritos con el mismo ancho

$x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{1}{n}$ cuya altura es $f(x_{n-1})$.

2. Se considera la función f con $f(x) = x^1$.
- Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
 - Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
 - Apliquen la fórmula del área del triángulo para verificar que el límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos es $\frac{1}{2}$.
 - Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

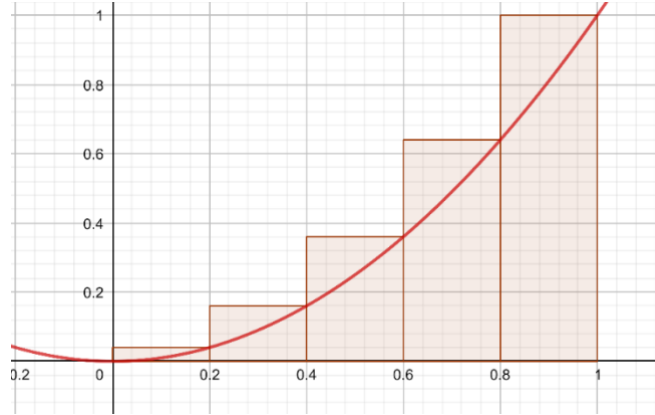
$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + n - 1).$$

Para la suma $(0 + 1 + 2 + \dots + n - 1)$, se tiene la expresión algebraica $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$.

Determinen el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

- Considerando que el límite del área bajo el gráfico en el intervalo $[0; 1]$, se puede representar por $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$, ¿cómo se puede representar –mediante una expresión algebraica– el área sobre el intervalo $[0; x]$ y con las alturas $f(x_0) = x_0^1$ de los rectángulos en cada lugar x_0 ?
3. Se considera la función g con $g(x) = x^2$.
- Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
 - Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
 - Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $g(x_0) = x_0^2$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0; x]$ mediante una expresión algebraica?

4. Se considera la función g con $g(x) = x^2$ y se aproxima el área bajo el gráfico mediante rectángulos circunscritos.



- a. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Para la suma $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$, se tiene la expresión algebraica: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Determinen el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

- b. Comparen los resultados anteriores: ¿hay diferencias o similitudes? Expliquen.

5. Se considera la función h con $h(x) = x^3$.

- a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0;1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
- b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área debajo el gráfico sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
- c. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^4 \cdot (0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3)$$

Para la suma de $(0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3)$, la expresión algebraica es $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

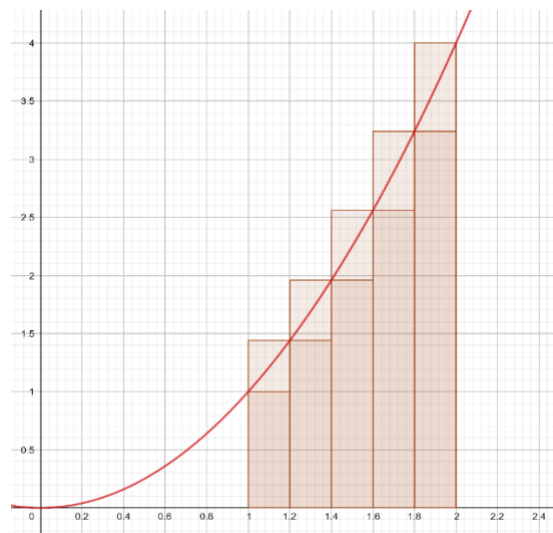
Determinen el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $h(x_0) = x_0^3$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0; x]$ mediante una expresión algebraica?

6. Considerando los resultados de las actividades anteriores, ¿qué regularidad se puede constatar entre la función f , cuyo gráfico delimita el área, y la función F que representa el área sobre el intervalo $[0; x]$? Verifiquen con:

- $f(x) = x^1$; $F(x) =$ _____
- $g(x) = x^2$; $G(x) =$ _____
- $h(x) = x^3$; $H(x) =$ _____
- Generalicen para $r(x) = x^m, m \in \mathbb{N}$ $R(x) =$ _____
- ¿Cuáles son las funciones que resultan, si se derivan las funciones F, G, H y R ?

7. Se considera la función g con $g(x) = x^2$. La imagen muestra una aproximación inferior y superior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1; 2]$.



- Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada.
- Utilizando un graficador digital, se puede encontrar más aproximaciones; redondeen a las centésimas y representenlas en una tabla.
- Conjeturen acerca del límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos, y representenlos como fracción.

- d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función G , determinando la diferencia $G(2) - G(1)$.

rectángulos	inferior	superior
20	2,26	2,41
50	2,30	2,36
100	2,32	2,35
200	2,33	2,34

8. Se considera la función k con $k(x) = \sqrt{x}$.
- Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
 - Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
 - Suponiendo que la regularidad entre las funciones f y F existiría también para “funciones potencias” con exponentes fraccionarios:
 - ¿Qué función F puede resultar para la función f con $f(x) = \sqrt{x}$?
 - ¿Qué número se puede esperar como límite del área sobre intervalo $[0; 1]$?

DETERMINAR EL ÁREA BAJO UNA CURVA

1. Se considera la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$, cuyo gráfico se muestra, junto con una aproximación superior e inferior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1; 2]$.



Función l

- Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
 - Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
 - Apliquen la regularidad encontrada en 5 y determinen la ecuación funcional de la función L para la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$.
 - Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función L (resultado de G en 5), determinando la diferencia $L(2) - L(1)$.
2. Se considera la función j con $j(x) = \frac{1}{x}$. ¿Por qué la regularidad entre f y F encontrada en 5, no existe en este caso? Expliquen sus respuestas dentro del grupo.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre el área y el volumen: Algunos ejercicios pueden ser:
 - ¿Cuál es la diferencia entre área y volumen?
 - ¿Cómo se calcula el área de un cuadrilátero cualquiera?
 - ¿Cómo se calcula el volumen de un paralelepípedo?
 - Describe la red de un paralelepípedo y de un prisma, e identifica los elementos básicos que te permiten reconstruir estos cuerpos por repetición.
 - Describe las fórmulas de volumen para los cuerpos que ya conoces.
2. Se recomienda comenzar con ejercicios en que los jóvenes establezcan las derivadas y posibles antiderivadas de funciones polinómicas, y luego descubran la regularidad que existe entre la función f de la curva que delimita el área y la antiderivada F , con la cual se determina el contenido del área bajo la curva.
3. Al obtener resultados y hacer representaciones, obtienen una primera impresión intuitiva sobre la regularidad entre la función que delimita el área y la función con la cual se establece el contenido del área bajo la curva.
4. Igual que en la actividad en la cual descubrieron la regularidad entre tangente, razón instantánea y derivada, para la integral se recomienda que usen una sola función de potencias con exponente natural para explicar y representar en detalle la relación entre la curva y la integral definida. Luego conviene seguir con la función “raíz cuadrada”, y revisar la derivada y la integral en una representación gráfica y mediante cálculos.
5. Se sugiere verificar en cada caso las regularidades que se dan tanto en una familia de la función potencia, como en una familia de la función raíz cuadrada; tales regularidades permiten observar y concluir lo común que resulta del procedimiento de determinar la integral definida. Si ya surgen preguntas acerca de funciones potencia con exponente entero negativo, hay que aludir a otra familia de la función potencia y realizar el trabajo con herramientas digitales para facilitar las representaciones y los cálculos.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado.
 - Elaboran el modelo del área bajo la curva como una noción básica de la integral.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analysis/integral/integral.html>
- Explicación de la integral definida
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/>
- Definición de la integral definida
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ecured.cu/Integral_definida