Actividad 4: Aplicando la derivada para detectar máximos y mínimos.

PROPÓSITO

Los estudiantes retoman desde el inicio el concepto de derivada, comenzando con un contexto de medición y velocidad, para luego continuar con la comprensión de la ley de Turgot y con problemas de aplicación en el ámbito de la extracción de minerales, costos e ingresos de una producción y procesos de fotosíntesis. Finalmente, retoman nuevamente la función compuesta y la derivada, en una aplicación relacionada con procesos de desagües y los costos de transporte del agua. En todas las aplicaciones, deben valorar y aprovechar las herramientas disponibles para resolver el problema, retomando y utilizando conceptos de actividades anteriores.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

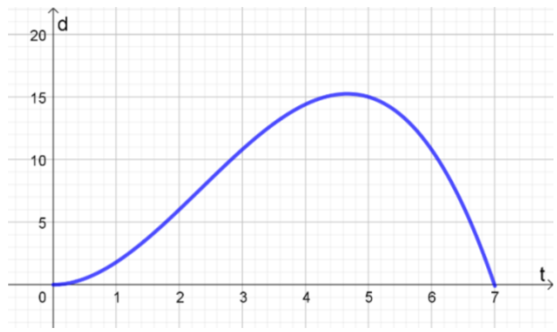
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿CÓMO INTERPRETAR LOS NIVELES DE CONTAMINACIÓN?

Desde su edificio central, un vehículo de monitoreo ambiental sale diariamente a recorrer la ciudad para medir niveles de contaminación atmosférica en dos rondas continuadas; la primera se extiende por siete horas. Para determinar la distancia p (medida en kilómetros) de la central a la que está el vehículo en todo instante t (medido en horas) durante su primera ronda, se ha encontrado que la distancia p puede modelarse por la función $p: [0,7] \to \mathbb{R}$, definida por
$p(t) = -0{,}3t^3 + 2{,}1t^2$.



La imagen muestra una gráfica de esta función.

a. Utiliza la función $p(t)$ para dibujar en el gráfico anterior la distancia de la central a la que estaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas y a las 6 horas; es decir, grafica los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$.
b. En el gráfico del enunciado, construye la recta que pasa por los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$ y determina la pendiente de esta recta.

Si en dos tiempos t_0 y t_1 se registran las respectivas ubicaciones $p(t_0)$ y $p(t_1)$ de un móvil, la rapidez media (v_m) de dicho móvil se define como la razón entre el desplazamiento que realiza $p(t_1) - p(t_0)$ y el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ que le toma dicho desplazamiento. Esto se escribe de la siguiente manera:

$$v_m = \frac{p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0} \mid [t_0, t_1]$$

c. Determina la distancia de la central a que estaba el vehículo de monitoreo a las 3 horas y a las 5 horas:

$p(3) =$ $\qquad\qquad$ $p(5) =$

d. La rapidez media se interpreta como la rapidez que habría tenido un móvil si se hubiese movido con rapidez constante entre las t_0 y las t_1 horas durante su recorrido. Redacta la interpretación de la rapidez media del vehículo de monitoreo.
e. Con los datos anteriores, determina la rapidez media del vehículo de monitoreo de las 3 a las 5 horas:

$$v_m = \underline{\qquad\qquad}$$

f. Compara el valor de v_m con el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que graficaste en ejercicio b, ¿son iguales o son distintos? De ser iguales, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos de su gráfica, con la noción de rapidez media.

g. Determina la rapidez media del vehículo de monitoreo en los siguientes intervalos de tiempo:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \dfrac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
3	5			
3,5	4,5			6
3,8	4,2			
3,9	4,1			
3,99	4,01			
3,999	4,001			

h. Como los intervalos de tiempo se van acortando cada vez más, conjetura el valor de la rapidez instantánea que llevaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas de su recorrido.

Para hallar la rapidez instantánea como una función derivada, se deja fijo el tiempo t_0 y el tiempo posterior t_1 se puede escribir como $t_1 = t_0 + h$, donde h es un valor positivo. Luego, interesa conocer la rapidez media entre t_0 y t_1 cuando t_1 tiende a t_0 o también, como la tendencia de $t_0 + h$ cuando h tiende a cero; o sea, el límite de la rapidez media cuando $h \to 0$, lo que se escribe

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

i. Utiliza esta última expresión para determinar una expresión algebraica para la rapidez instantánea en t_0 del vehículo de monitoreo, calculando el respectivo límite:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \dfrac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
t_0	$t_0 + h$			$\dfrac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

j. La expresión que hallaste es la expresión algebraica de la rapidez instantánea a partir de la función $p(t)$ de la distancia del móvil de monitoreo con su central, en el momento t. La expresión algebraica que hallaste es la función derivada (que se denota por $(d\, p(t))/dt$) de la función de distancia $p(t)$. Escribe la función derivada con la notación que usaremos:

$$\frac{d\, p(t)}{dt} =$$

k. Usando el resultado anterior, determina la rapidez instantánea del móvil de monitoreo a las siguientes horas (escribe los resultados en la unidad de medida correspondiente):

t (h)	0	1	2	3	4	$\frac{14}{3}$	5	6
$\frac{dp(t)}{dt} en \frac{km}{h}$	$\frac{dp(0)}{dt} =$	$\frac{dp(1)}{dt} =$	$\frac{dp(2)}{dt} =$	$\frac{dp(3)}{dt} =$	$\frac{dp(4)}{dt} =$	$\frac{dp\left(\frac{14}{3}\right)}{dt} =$	$\frac{d\,p(5)}{dt} =$	$\frac{d\,p(6)}{dt} =$

l. Compara el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que pasa por $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$, con el valor de $\frac{dp(4)}{dt}$. ¿Son parecidos o son muy distintos? De ser parecidos, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos muy cercanos de su gráfica, con la noción de rapidez instantánea. Si la recta entre $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$ es secante a $p(t)$, cuando los puntos están infinitamente cercanos a 4, la recta se convierte en tangente en el punto $(4, p(4))$. En este caso, ¿a qué elemento de la recta tangente corresponde el valor $\frac{dp(4)}{dt}$ =?

m. Compara el valor de la rapidez media a las 4 horas de viaje del móvil que conjeturaste en d, con el valor de la rapidez instantánea a las mismas 4 horas de viaje del móvil ($\frac{dp(4)}{dt}$) que obtuviste ahora, y conjetura la relación que hay entre rapidez media y rapidez instantánea.

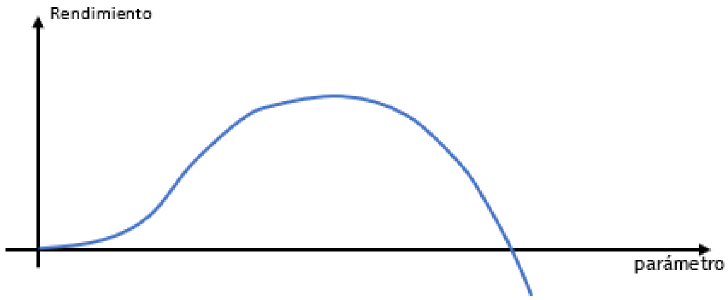
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

Utiliza lo estudiado para responder estas preguntas:

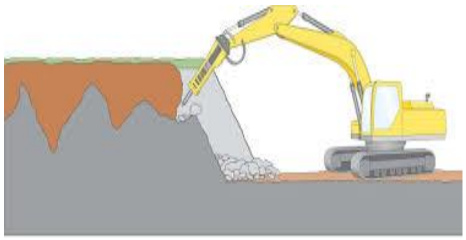
a. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 1$?
b. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 6$?
c. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = \frac{14}{3}$? (compárala con la rapidez instantánea en $t = 0$).
d. Observa que, a partir de cierto valor, las rapideces instantáneas cambian de positivas a negativas. Formula una hipótesis acerca de lo que indica este comportamiento.
e. ¿En qué intervalo de tiempo el móvil va disminuyendo su rapidez y en cuál va aumentado?
f. ¿Cómo se puede interpretar el signo positivo y el signo negativo en los valores de la derivada en este caso?

COMPRENDIENDO LA LEY DE TURGOT

El economista y político francés A.R.J. Turgot (1727 - 1781) encontró una ley que dice: Si aumenta y sigue aumentando un parámetro en la producción, mientras los demás parámetros queden invariantes, la producción inicialmente sube en su rendimiento, después disminuye su rendimiento y finalmente llega a resultados negativos. Un comportamiento similar se muestra en esta imagen.



a. Mediante herramientas tecnológicas digitales y utilizando deslizadores, diseña gráficos de polinomios de tercer grado para mostrar que pueden modelar un comportamiento similar a la "ley de Turgot".



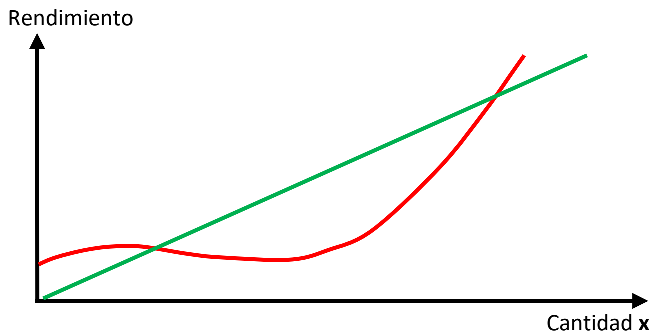
Una empresa minera está explotando un mineral. Los costos para la extracción se pueden modelar con una función C con $C(x) = 0{,}2x^3 - 4x^2 + 22x + 6$, en la cual x es la cantidad en toneladas del mineral diariamente extraído y C son los gastos en la unidad de 1 millón de pesos. Los ingresos I de la venta del mineral por tonelada, también en la unidad de 1 millón de pesos, siguen la función lineal $I(x) = 10x$.

a. Elabora la ecuación de la función G que representa las ganancias.
b. Confecciona el gráfico de la función de las ganancias G en el intervalo de toneladas de $[0;\ 18]$ y determina aproximadamente, en el gráfico, la cantidad extraída para la cual se genera un mínimo y un máximo de las ganancias G.
c. Verifica algebraicamente con la noción de derivadas, las cantidades x_1 y x_2 para las cuales se genera un mínimo y un máximo de las ganancias.
d. Confecciona el gráfico de la derivada de G' de G y verifica la coincidencia entre las actividades anteriores.
e. Por una sobreoferta y debido a otros indicadores económicos en el mercado internacional, los ingresos por tonelada bajan a 3 millones de pesos. Determina gráficamente el intervalo de extracción en el cual se genera ganancias.

IDENTIFICANDO GRÁFICAMENTE COSTOS, INGRESOS Y GANANCIAS

En el gráfico, la variable y representa los costos y los ingresos de una producción. Los jóvenes deben contestar las preguntas y razonarlas.

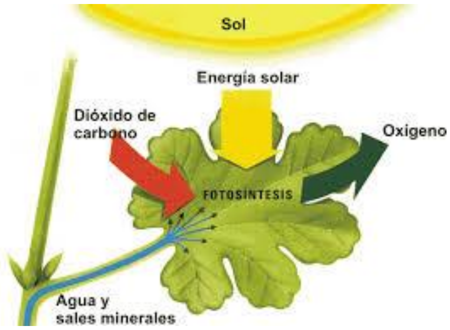
- ¿Cuál de los gráficos representa los costos y cuál los ingresos?
- ¿Hay costos fijos?
- ¿Dónde hay máximos, mínimos e inflexión? Marcar los puntos.
- ¿En qué intervalo hay ganancias en la producción? Marcar el intervalo en el eje X.

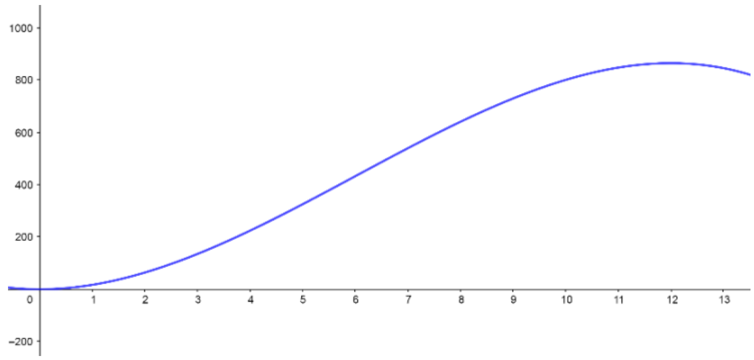


INTERPRETANDO GRÁFICAMENTE LA FOTOSÍNTESIS

La fotosíntesis se genera en las hojas de las plantas y su producto es oxígeno, uno de los elementos fundamentales para la vida. En la imagen se muestra el gráfico de una función que modela aproximadamente la producción diaria de oxígeno de un árbol.

- La función representa un polinomio de tercer f grado con la ecuación $f(t) = at^3 + bt^2$.
- La función f representa el volumen total del oxígeno producido en litros hasta la hora indicada.
- La variable t representa el tiempo en horas que han pasado desde la salida del sol.





a. Determina los parámetros a y b con la siguiente información:
   - En el instante $t = 6$ horas después de la salida del sol, se han acumulado 540 litros de oxígeno producido.
   - En el mismo instante se empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido.

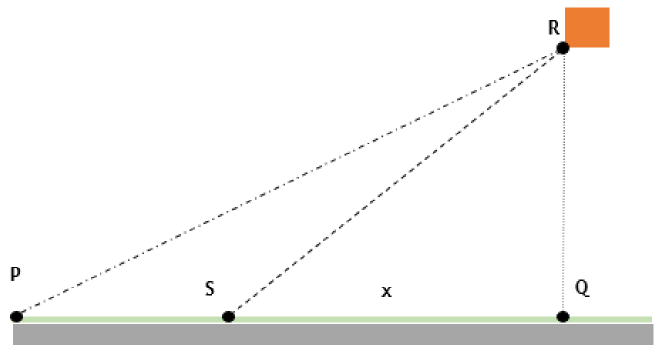
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

b. Con los resultados de la actividad anterior y utilizando herramientas tecnológicas digitales, elabora el gráfico de la función f.

c. Determina algebraicamente el punto máximo de la función f.

DERIVANDO UNA COMPUESTA EN UN CONTEXTO DE DESAGÜES

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecte una casa rural a un servicio del agua y desagüe ya existente, que está lejos de la casa. El dibujo esquemático muestra la ubicación de la casa, cuyo terreno se extiende hacia una calle vecinal dibujada por la franja gris.



El servicio existente de agua y desagüe llega hasta el punto P, al lado de una calle que sigue en dirección Q. La casa R tiene la distancia $\overline{QR}$ más corta de la calle de 300m. El segmento $\overline{PQ}$ tiene el largo de $500\ m$. Debido a la situación geológica del suelo, los costos estimados por metro corriente de la nueva conexión directamente al lado de la calle son de 3UF, y por el terreno hacia la casa son de 6UF. Como la empresa quiere maximizar las ganancias, se modela la conexión determinando el punto S al lado de la calle, en el cual se debe iniciar la bifurcación del conducto hacia la casa rural.

a. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado directo $\overline{PR}$.

b. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PQ}$ u $\overline{QR}$.

c. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 450m$.

d. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 350m$.

e. Elabora la ecuación de la función C, que modela los costos de la conexión a la casa en dependencia de x.

f. Determina la derivada C' de la función C, aplicando la regla de la función compuesta.

g. Determina el valor de x_{min} para el cual los costos lleguen a un mínimo.

h. Conjetura acerca de la condición bajo la cual la conexión directa $\overline{PR}$ del conducto sea la más barata. Argumenta y comunica la conjetura.

i. Si los costos en la construcción del conducto a través del terreno aumentan más y más en comparación con los costos al lado de la calle, ¿en qué dirección se mueve el lugar x_{min} en el dibujo esquemático que determina el punto S de la bifurcación? Explica y argumenta sin realizar cálculos.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para la verificación algebraica, es importante que los alumnos resuelvan ecuaciones hasta el cuarto grado, aplicando la factorización de una suma con potencias para obtener un producto de dos expresiones algebraicas potenciales con el exponente 2 como el de mayor grado. Así se reducen las ecuaciones a ecuaciones cuadráticas. Este proceso no debe hacerse necesariamente de forma manual, hay que dar la posibilidad de elegir entre cálculos manuales y digitales.

2. Se sugiere motivar a los estudiantes para que ellos mismos encuentren la ecuación de la función de las ganancias a partir de los costos y de los ingresos. Se pueden apoyar en el gráfico y considerar valores de una situación real, modelando la curva y guiándose por la ley de Turgot.

3. Se recomienda hacer el gráfico para visualizar la situación en todos los casos de aplicación. Antes de determinar algebraicamente las derivadas de $\boldsymbol{G'}$ y $\boldsymbol{G''}$, también es importante que ubiquen en el gráfico de $\boldsymbol{G}$ los puntos extremos y de inflexión. Esto les permite detectar errores en los cálculos y les ayuda a explicar los resultados de forma visual y algebraica.

4. Para que recuerden la función compuesta, se sugiere que, al iniciar la actividad, elaboren gráficos de una función cuadrada compuesta con una función lineal y que calculen la derivada de una función compuesta.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
    - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
    - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm
- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html
- Artículo sobre las derivadas en economía
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia
- Derivada de la función compuesta
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_3.htm
- Método para derivar la raíz cuadrada de x
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikihow.com/derivar-la-ra%C3%ADz-cuadrada-de-X
- Información sobre máximos, mínimos y puntos de silla
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points