Actividad 3: Describiendo las derivadas como funciones de las tendencias de un cambio

PROPÓSITO

Los estudiantes aprovechan las herramientas disponibles para resolver problemas en el ámbito de la velocidad de un tren y de corredores, y una situación de costos de una empresa. Antes de esta aplicación, trabajan en un contexto puramente matemático donde se apoyan de representaciones y cálculos que pueden hacerse de forma manual o digital.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

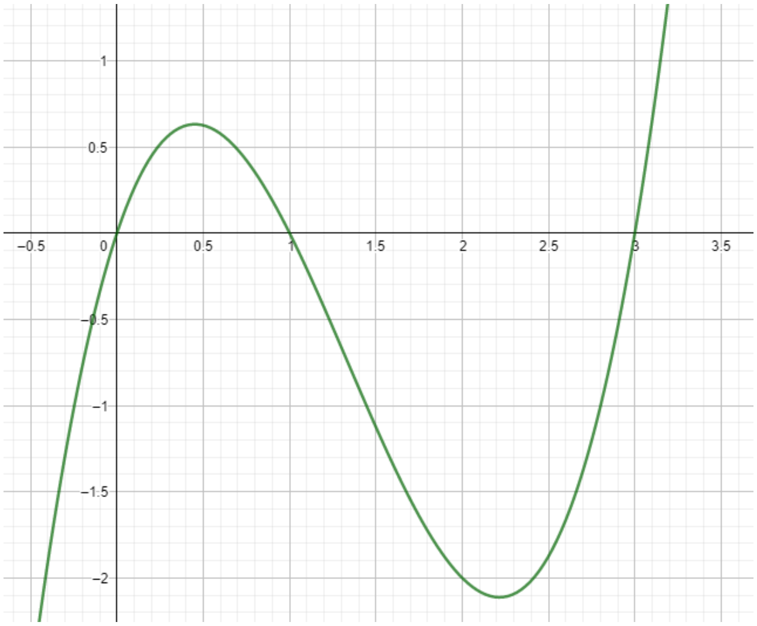
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN?

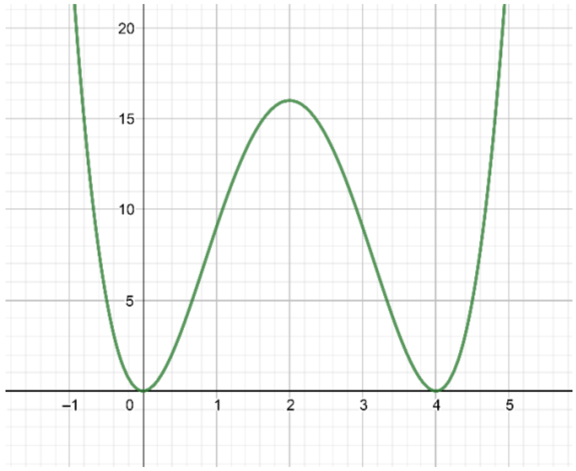
1. La imagen representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.



a. Considerando el gráfico, ¿cuáles son los “ceros” de la función f?
b. Determina algebraicamente los “ceros” de la función.
c. Considerando el gráfico, ¿en qué puntos x_1, x_2 aproximadamente hay puntos máximos o mínimos locales?
d. Determina la derivada f' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
e. Considerando los gráficos de f y f', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' en los lugares x_1, x_2?
f. Determina algebraicamente el lugar x_1 del máximo local y el lugar x_2 del mínimo local. Relaciona con el gráfico.
g. Considerando el gráfico de f, ¿en qué lugar x_3 aproximadamente hay un punto de inflexión?
h. Determina la segunda derivada f'' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
i. Considerando los gráficos de f' y f'', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' y la segunda derivada f'' en el lugar x_3?
j. Determina algebraicamente el lugar x_3 en el cual existe el punto de inflexión.
k. Verifica mediante la tercera derivada de f la existencia del punto de inflexión.

IDENTIFICACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE MÍNIMOS, MÁXIMOS Y DE INFLEXIÓN

1. En la imagen se representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$.
   Mirándolo, responde:



   a. ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje x? ¿Qué propiedad adicional tienen estos puntos?
   b. ¿En qué lugares x_1, x_2, y x_3 hay puntos extremos? ¿De qué tipo son?
   c. ¿En qué lugares x_4 y x_5 hay puntos de inflexión?
   d. Determina algebraicamente la primera, segunda y tercera derivada de f.
   e. Verifica algebraicamente la existencia y las coordenadas de los ceros, y de los puntos máximos, mínimos y de inflexión.
   f. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, representa los resultados de la actividad anterior mediante los gráficos de f', f'' y f''' en el mismo sistema de coordenadas.
   g. Describe el comportamiento de f', f'' y f''' en los puntos máximos, mínimos y de inflexión. Completa la tabla considerando además los cambios de $f'(x_i)$ y de $f''(x_i)$ en x_i. Anota también el cambio de curvatura en los puntos de inflexión.

$f(x_i)$	Punto máximo	Punto mínimo	Punto de inflexión
$f'(x_i)$	0 y cambio: $(+) \rightarrow (-)$		---
$f''(x_i)$			
$f'''(x_i)$			

   h. Determina algebraicamente la ecuación de la tangente en los puntos de inflexión.

i. Aprovechando la simetría del gráfico de f, determina el punto de intersección entre las tangentes de los puntos de intersección.

j. Se considera una colección de funciones g_a con $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. ¿Para qué valor de a la función g_a coincide con la función f?

k. Determina el valor de a de tal manera que, en $x_0 = 0$, el gráfico de g_a tenga un punto de inflexión.

l. Representa el resultado de la actividad k, elaborando el gráfico de g_a mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

¿CUÁLES SON LAS LIMITACIONES DE UN MODELO MATEMÁTICO AL DESCRIBIR LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA?

1. Un tren de carga tiene una aceleración de aproximadamente $\frac{1}{10}\frac{m}{seg^2}$ que, en condiciones ideales, genera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado s con $s(t) = \frac{1}{20}t^2$, $(t \geq 0)$.

($s =$ recorrido en metros y $t =$ tiempo en segundos).

a. Elabora el gráfico de s mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

b. Elabora la fórmula de la función $s´$ que representa la velocidad instantánea del movimiento, y determina el instante t_0 en el cual el tren llega a la velocidad de $90\frac{km}{h}$.

c. ¿Por qué, en el movimiento real, el modelo matemático que describe la velocidad instantánea tiene limitaciones? Argumenta la respuesta.

d. Elabora un gráfico esquemático de la velocidad instantánea en el cual, a partir de un instante t_1, se considera que el modelo matemático no refleja la realidad.

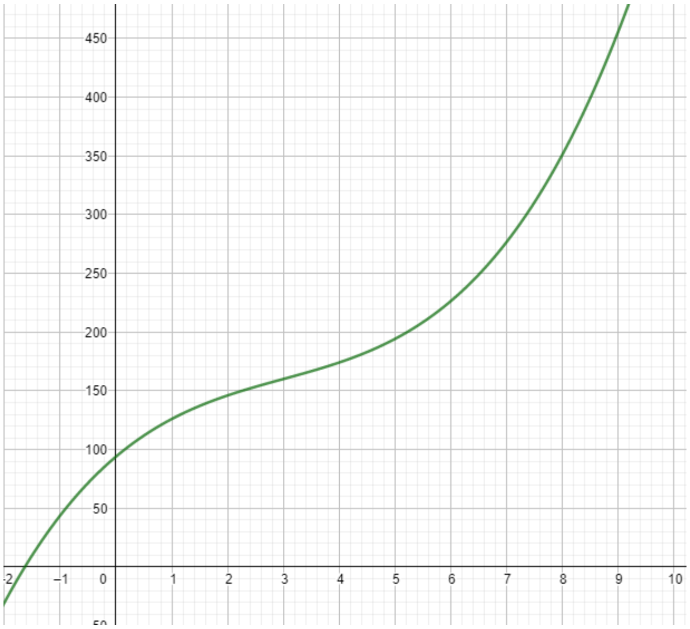
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

e. En este instante t_1, el gráfico ¿tiene un punto de inflexión? Argumenta y comunica la respuesta.

2. Un maestro de instalaciones de calefacción quiere empezar a instalar termopaneles para aumentar el rubro de su servicio. Una institución consultora para mini-pymes le hizo gratuitamente un estudio de los costos g que dependen de la cantidad de paneles semanalmente instalados. La función g de los costos se modela por la ecuación:

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94,$$

cuyo gráfico se muestra en el siguiente sistema de coordinadas. El eje X representa la cantidad de termopaneles instalados y el eje vertical representa los costos en miles de pesos.



a. Conjetura si la función g podría tener máximos o mínimos locales para valores de x que están fuera del intervalo mostrado.

b. Verifica o rechaza algebraicamente la conjetura anterior.

c. ¿Por qué la función no tiene sentido en la realidad para $x < 0$?

d. Si se considera la tendencia del aumento de los costos, ¿con qué función se describe esta tendencia?

e. Elabora la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

f. Con herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, grafica la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

g. Basado en el gráfico anterior, contesta: ¿en qué lugar x_0 se cambia la tendencia del aumento de los costos, y en qué dirección se realiza el cambio?

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

h. Determina algebraicamente, mediante la función $C(x)$ que describe la tendencia del aumento de los costos, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

i. Determina algebraicamente, mediante la noción de derivadas de la función g, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

j. ¿Cómo se llama el punto $C(x_0, f(x_0))$?

¿ES POSIBLE PREDECIR QUIÉN GANARÁ LA CARRERA DE ATLETISMO?

1. En un certamen regional de atletismo, los dos mejores atletas en la disciplina tienen los datos deportivos que muestra la siguiente tabla. Una carrera de 100m tiene dos fases: la primera es la aceleración hasta la velocidad máxima y la segunda implica un movimiento a velocidad constante con la velocidad máxima lograda en la fase de aceleración. En el modelo matemático, se supone que la aceleración también es constante.

   La fase de aceleración se modela con la función f con $f(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2$, en la cual $f(t)$ representa el recorrido f en el instante t a partir de la partida.

	Aceleración	Tiempo máximo de mantener la aceleración
Atleta A	$3\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3[s]
Atleta B	$2{,}8\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3,4[s]

   Con base en estos datos:

   a. Conjetura acerca del posible ganador de la carrera.
   b. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, elabora el gráfico de la función f para ambos alumnos.
   c. Determina gráficamente el posible ganador.
   d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la razón instantánea (velocidad instantánea) expresada por la tangente y la derivada de la función f.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para iniciar la actividad, se recomienda presentar los gráficos y dar instrucciones o preguntas como: ¿Dónde crees que hay un cambio? ¿Cómo se puede describir este cambio? ¿Qué ocurre con la tangente? También se debe hacer notar las situaciones extremas, los extremos locales y los puntos de inflexión.

2. Se sugiere indicar las unidades de medida; la aceleración en esta actividad está en la unidad de $\frac{m}{seg^2}$, lo cual implica que la velocidad se debe adaptar al sistema de metros y segundos. Normalmente, cuando se habla de vehículos, la velocidad está en kilómetros y horas.

3. Conviene hacer una especie de dictado con las características de una función para que los estudiantes grafiquen lo que están entendiendo. Algunas pueden ser: entre un punto máximo y un punto mínimo local hay un punto de inflexión; entre dos puntos máximos hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto máximo. Para evitar la derivación de un producto, se recomienda transformar de producto a suma.
4. Cabe notar que, en una de las tareas, se aplica la noción de derivadas de funciones en un contexto de economía. La función de los costos muestra tendencias que disminuyen, aunque los costos aumenten y muestra un punto de inflexión en los costos.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- La noción de derivada en el contexto de economía

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia