Actividad 2: Describiendo la derivada como función de pendientes de rectas tangentes

PROPÓSITO

Los estudiantes analizan el comportamiento de funciones y comparan este comportamiento de forma local y global. Resuelven problemas científicos, pensando con flexibilidad para reelaborar sus ideas y puntos de vista sobre la aplicación de las funciones al mundo real. Además, representan las funciones, argumentan sus respuestas y realizan cálculos algebraicos en situaciones dentro del contexto matemático, y aplicados al mundo real.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

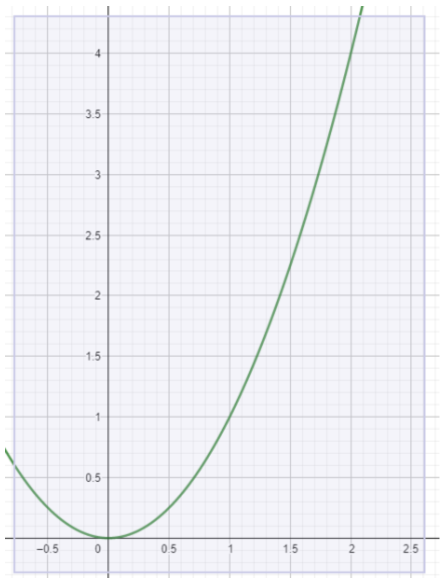
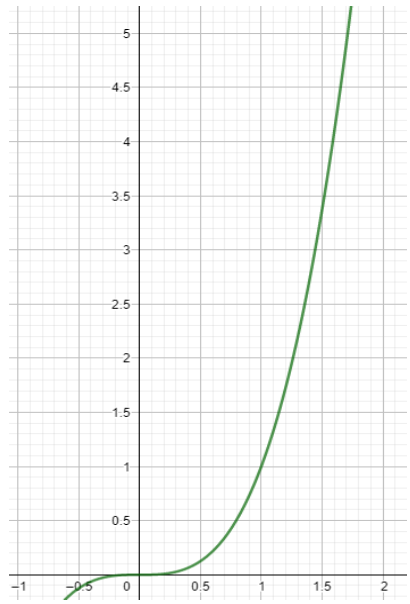
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

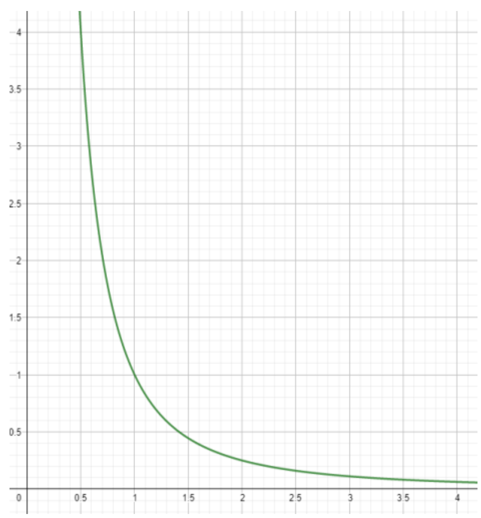
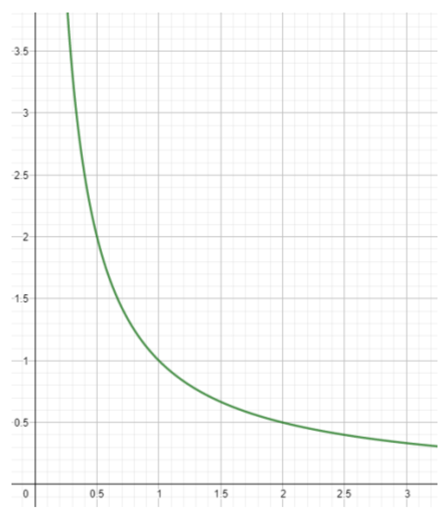
Duración: 12 horas pedagógicas

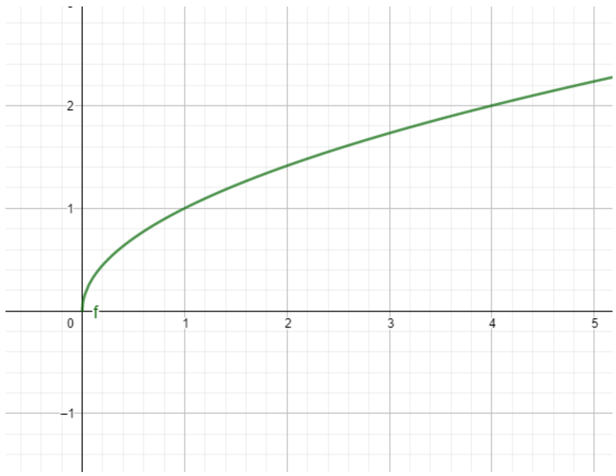
DESARROLLO

¿QUÉ RELACIÓN HAY ENTRE LA TANGENTE Y LA DERIVADA?

Se muestra a continuación los gráficos de cuatro funciones f, g, h, k, l. Todas son derivables en el lugar $x_0 = 1$.



a. Identifica los gráficos con sus funciones respectivas: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $k(x) = \frac{1}{x^2}$, $l(x) = \sqrt{x}$.

b. En los puntos F_0, G_0, H_0 y K_0 de las funciones, f, g, h y k, todos con la abscisa $x_0 = 1$, dibuja una recta que aproxime mejor la tangente en los puntos considerados y determina aproximadamente su pendiente.

c. Elabora la expresión algebraica de la pendiente de las secantes $\overline{F_0F}$, $\overline{G_0G}$, $\overline{H_0H}$, $\overline{K_0K}$ y $\overline{L_0L}$ en la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

d. Determina la pendiente de la tangente en $x_0 = 1$ como límite de la sucesión de las secantes $\lim\limits_{h \to x_0} \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$.

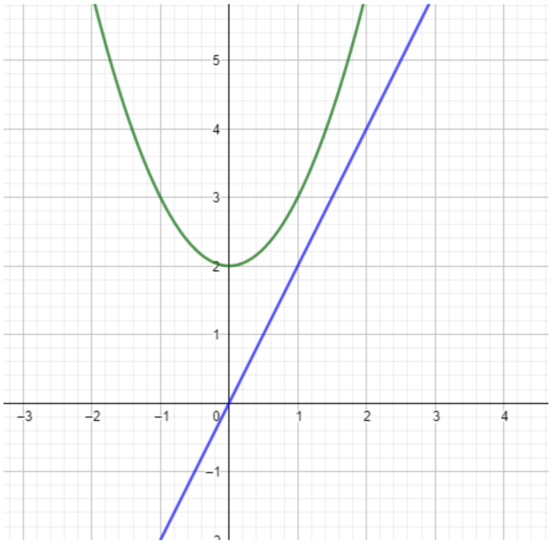
e. Relaciona la expresión $f'(x_0)$ llamada "derivada de f en x_0" con el límite calculado anteriormente.

f. Compara la derivada con la pendiente anteriormente estimada.

g. ¿Qué procedimiento matemático se puede aplicar para obtener la pendiente de la tangente?

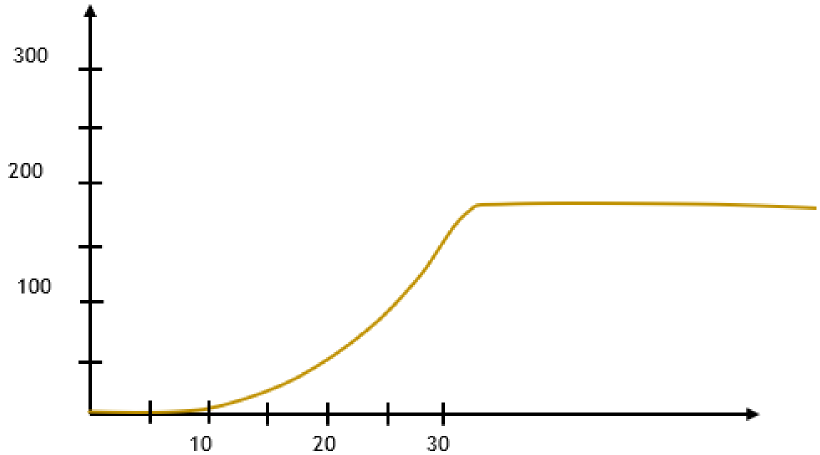
REPRESENTAR RECTAS TANGENTES CON LA NOCIÓN DE DERIVADA

1. Se considera la función cuadrática f, descrita por la ecuación $f(x) = x^2 + 2$, y una colección g_t de rectas que pasan por el origen $O(0,0)$ con la ecuación $g_t(x) = t \cdot x$ $(t \in \mathbb{R})$.
   a. Determina el parámetro t de manera que la recta tenga un solo punto común con el gráfico de f.
   b. Conjetura acerca de la cantidad de soluciones del problema.
   c. Mediante herramientas tecnológicas, resuelve gráficamente el problema.
   d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la derivada.
   e. Resuelve algebraicamente el problema mediante la elaboración de una ecuación cuadrática con el parámetro t, restringiendo las soluciones a una sola.



2. Un vehículo para explorar planetas tiene la capacidad de subir en cráteres de hasta una pendiente de 100%. Abajo se muestra el perfil del cráter de un planeta, que está representada aproximadamente por una función cuadrática f con $f(x) = \frac{1}{400}x^2$ en la cual la variable x representa metros.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA d, 3° y 4° medio



a. Verifica que el vehículo explorador no puede subir hasta la meseta que se extiende en la orilla del cráter.

b. ¿Hasta qué altura puede subir el vehículo explorador?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Según el contexto del curso, se puede generalizar la derivada para estas funciones, extendiendo el grado de los exponentes. En general, se debe considerar los puntos $F\left(x_o, f(x_o)\right)$, $G\left(x_o, g(x_o)\right)$, $H\left(x_o, h(x_o)\right)$, $K(x_0, k(x_0))$ y $L(x_0, l(x_0))$ y para cada punto determinar, para cada función, el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. De aquí se debe desarrollar la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$ para una función potencia f con $f(x) = x^m (m \in \mathbb{N})$, aplicando el "triángulo Pascal" y luego determinar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. Con esto se verifica que la derivada $f´$ se expresa por $f´(x) = (m-1)x^{m-1}$.

2. Se sugiere realizar ejercicios sencillos de cálculo de límites de expresiones fraccionarias; por ejemplo:

   con la forma $\lim_{h \to x_0} C(x_0 + h)$.

   - $C(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ para x_0 = 1
   - $C(x) = \frac{x^3+x^2}{2x+2}$ para x_0 = -1

   con la forma $\lim_{x \to \infty} K(x)$

   - $K(x) = \frac{2x^4+x^3}{x^3-1}$
   - $K(x) = \frac{2x^2-8}{3x^3-12x}$

3. Para la última actividad, se debe considerar que la pendiente de 100% corresponde a un ángulo de 45°, $m = tg\ \alpha = 1$.

4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm

- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html

- Información sobre la interpretación geométrica de la derivada
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatio.com/interpretacion-geometrica-de-la-derivada-ejercicio-resuelto/