

Actividad 4: Las ecuaciones vectoriales y los fenómenos de la naturaleza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes apliquen los vectores en un contexto simplificado y, específicamente, las ecuaciones vectoriales. Principalmente, se busca que valoren la ecuación vectorial por su aporte para entender fenómenos de la naturaleza que pudieron haber estudiado en otras asignaturas, pero que, en este caso, se generalizan matemáticamente. Para esto, hay que fomentar un trabajo colaborativo, considerando las habilidades y experticia de cada integrante del grupo. Además, se pretende que experimenten cómo, a medida que se modifica, agrega o quita variables de la realidad, se puede simplificar el modelo matemático obtenido o aumentar su complejidad.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

DETERMINANDO UNA ECUACIÓN VECTORIAL SEGÚN UN PRIMER MODELO

Trabajan en grupos con un computador, usando Geogebra; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Comparte con tus compañeros de grupo las respuestas a las siguientes preguntas:
 - a. ¿Sabías que algunas estrellas que puedes ver en una noche podrían haberse extinguido?
 - b. ¿Sabías que la posición en la que tú ves una estrella no es exactamente la posición en la que se encuentra?
 - c. ¿Y que esta variación depende de las capas de la atmósfera y, principalmente, de un fenómeno llamado refracción?
2. Lee a tus compañeros de grupo la siguiente información: “El cambio de dirección y velocidad que experimenta una onda al pasar de un medio a otro se debe al fenómeno de la refracción, si cada medio tiene distinto índice refractivo. Esto ocurre solo si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios. Este fenómeno se puede observar a pequeña escala, como ocurre al sumergir una parte de una bombilla (pajilla) en un vaso con agua, o al mirar las estrellas y creer que están en cierta posición, cuando en realidad no lo están”.

- a. ¿Cómo responderías ahora las preguntas anteriores?
 - b. ¿Te aporta de alguna manera el párrafo anterior para cambiar tus respuestas?
 - c. ¿Te ayuda a justificar tus respuestas?
 - d. ¿qué es el índice de refracción y qué mide?
3. Consideren ahora un supuesto de primer modelo: En nuestro planeta ocurren iteradas refracciones de la luz en el aire, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire –lo cual conlleva un cambio continuo de la dirección del vector de la luz–; en este caso, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que no se haga refracción alguna. Consideren que el rayo de luz de una estrella llega a un lugar específico en la Tierra, donde está parado un observador (punto P). La situación se representa en la figura 1.
- a. Incluye un plano cartesiano en la figura. ¿Te ayuda en algo? ¿Por qué?
 - b. ¿En qué punto conviene ubicar el origen del plano cartesiano?
 - c. Discutan en el grupo y argumenten su decisión.

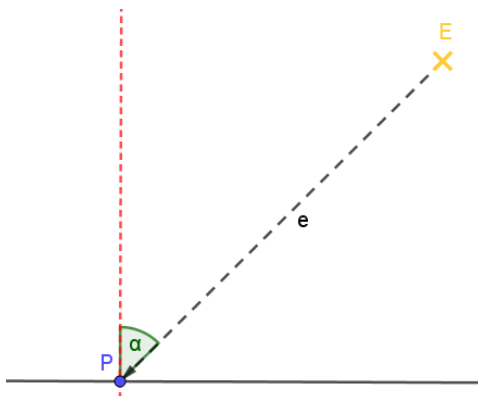


Fig. 1: Esquema primer modelo simplificado

4. Supongan que hay 45° de inclinación entre la recta vertical (respecto de la Tierra) y el rayo de luz, y que la estrella E está a una gran altura respecto de nuestro planeta.
- a. Al no contar con la información exacta de la ubicación de la estrella, ¿cómo podrían determinar la ecuación de la recta recién dibujada?
 - b. ¿Qué estrategias podrían seguir? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.
5. ¿Podrían determinar la ecuación vectorial de este rayo? ¿Con qué datos necesitan contar? Discutan en el grupo.
- a. ¿Qué punto conocen que pase por el rayo de luz? Indiquen sus coordenadas.
 - b. Según su modelo gráfico, ¿cuál es el vector posición para este punto que conocen? Expliquen de forma visual lo que se está haciendo.
 - c. Determinen las componentes de un vector director \vec{e} del rayo de la luz, considerando la inclinación de 45° .
 - d. Usando el vector posición de P y el vector director, escriban la ecuación vectorial del rayo de luz de esta estrella.
 - e. Expliquen cómo se interpreta la ecuación obtenida en el contexto del modelo. Anoten sus conclusiones.

DETERMINANDO ECUACIONES VECTORIALES SEGÚN UN SEGUNDO MODELO

Se sugiere que trabajen en grupo las siguientes actividades.

Suposición segundo modelo: En lugar de iteradas refracciones de la luz en el aire, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que se haga una sola refracción.

1. Observen la figura 2. En ella se muestra cómo el rayo de luz incidente de una estrella sufre un cambio de posición al refractarse una vez, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire.

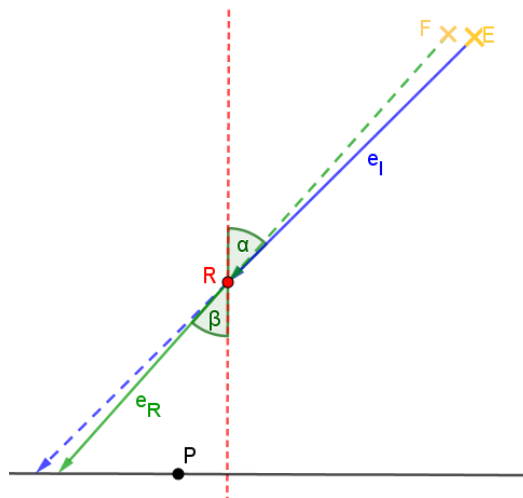


Fig. 2: Esquema segundo modelo simplificado (No a escala)

El ángulo α es el ángulo entre el rayo incidente (azul) en la capa del aire y la perpendicular (línea punteada en rojo). El ángulo β es el ángulo entre el rayo refractado (verde) y la perpendicular.

En este modelo, se considerará que $\alpha = 45^\circ$ y que $\beta = 44,98^\circ$.

2. Dibujen nuevamente el esquema anterior, ahora en un plano cartesiano.
 - a. ¿Dónde consideran más adecuado ubicar el origen del plano cartesiano? Argumenten su decisión.
 - b. ¿Cómo se interpreta el punto R en este contexto? Discutan en el grupo y respondan.
 - c. Determinen el vector director de ambos rayos.
 - d. Comparen con otros grupos de trabajo y analicen las diferencias y similitudes que pueda haber en los vectores directores, si el plano cartesiano tiene el origen en un punto distinto al que ustedes eligieron.
3. Consideren que la refracción ocurre a 5 km de altura y a 2 km horizontalmente, desde donde se ha ubicado el observador.
 - a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto R ? Discutan en el grupo y respondan.
 - b. ¿Cuál es el vector posición del punto R ? Discutan y respondan.
 - c. ¿Cuál es la ecuación vectorial de los rayos del modelo? Discutan y respondan.

4. Las ecuaciones son muy similares entre sí, ¿a qué se debe? Expliquen.
 - a. En el contexto, ¿a qué se debe específicamente la diferencia en ambas ecuaciones? Discutan y respondan.
 - b. Matemáticamente, ¿cómo se observa la diferencia entre ambas ecuaciones en el gráfico? Expliquen.
5. Supongan que una estrella está ubicada a $d = 6\,000\,000\,000$ km aproximadamente respecto del punto R .
 - a. ¿Cómo variarían las ecuaciones vectoriales obtenidas anteriormente? Discutan y respondan.
 - b. De acuerdo con el contexto del problema, ¿cuál sería la posición en la que un observador vería dicha estrella? Discutan y respondan.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La propuesta de esta actividad se centra en que apliquen las ecuaciones vectoriales para modelar un fenómeno de la naturaleza. Además, se propone que los estudiantes transiten de una situación muy simplificada a una más compleja para que noten que un fenómeno se puede abordar de ese modo y no se requiere estudiarlo de inmediato con todas las variables interactuando.
2. El modelo propuesto está muy simplificado para que los alumnos puedan centrarse en determinar la ecuación vectorial de forma sencilla, pero con sentido. Después se añade algo de dificultad, pero de todos modos muy por debajo del fenómeno real. Como se ha adaptado las consideraciones físicas del contexto, puede ser un desafío continuar con una discusión más profunda al respecto en las próximas clases.
3. Aunque se muestra un camino para determinar uno de los ángulos, usando el índice de refracción, se sugiere dar los valores de los dos ángulos involucrados; en todo caso, el profesor decide qué nivel de profundidad propiciará en clases y cuánto es lo que se puede pedir sobre el tema de refracción, incluyendo o simplificando el sentido físico que tiene o desarrollando otros problemas.
4. El uso del plano cartesiano es fundamental, ya que es el camino para expresar las ecuaciones de las rectas buscadas en su forma vectorial. Se propone que los jóvenes discutan sobre la mejor opción para ubicar el plano, pero de todos modos conviene que lleguen a consensos.
5. En el caso del segundo modelo, se puede hacer una variante y pedirles que determinen la medida del ángulo β , usando información sobre el índice de refracción; ello da una orientación más física al estudio del modelo. El índice n de refracción se representa por la expresión $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$. Con $n = 1,0002$ y un ángulo $\alpha = 45^\circ$ del rayo incidente, se calcula $\sin \beta = \frac{\sin 45^\circ}{1,0002}$, por lo que $\beta = 44,98^\circ$.
6. A medida que el modelo real se torna más complejo, se puede usar GeoGebra para comprender gráficamente la situación. Además, la herramienta de vectores permite trabajar con las componentes y compararlas.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
 - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra en línea
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Para profundizar en el estudio de la refracción
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/snell/snell.htm>