

Actividad 3: Transitar de 2D a 3D por medio de ecuaciones y vectores

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes vinculen el estudio de los vectores con las ecuaciones de rectas, que ya trabajaron en cursos anteriores. Ahora se presentará los vectores como una herramienta muy útil para determinar la ecuación de una recta, usando un punto y un vector, y diferenciando respecto de cómo lo hacían antes: con dos puntos de la recta o punto y pendiente. Al determinar la ecuación de una recta de este modo, se introduce el concepto de ecuaciones vectoriales, que se usan en variados contextos. Es la oportunidad de permitir que los alumnos se enfrenten libremente a la forma de representar y resolver el problema, utilizando las herramientas matemáticas que consideren necesarias.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

RECTAS POR MEDIO DE UN VECTOR

Pueden usar utilizar el software GeoGebra para las siguientes actividades; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Dibuja un vector \vec{a} que parta desde el origen del plano cartesiano y cuyo punto terminal sea el punto A .

- a. ¿Cuáles son las componentes del vector \vec{a} ?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

- b. Compara las componentes de \vec{a} con las coordenadas de A .
- c. El vector \vec{a} se llama vector posición de A ; ¿por qué crees que recibe este nombre?
- d. ¿Existe otro vector posición de A distinto al vector \vec{a} ? ¿Cuál? ¿Cómo lo encontraste?

2. Dibuja un vector \vec{b} cualquiera en el plano cartesiano anterior, que sea distinto al vector \vec{a} .
 - a. ¿Cuáles son las componentes del vector \vec{b} ?

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$
 - b. ¿Puedes trazar alguna recta que pase por el punto A y que contenga al vector \vec{b} ? ¿Existe dicha recta?
 - c. Traza una recta L que pase por el punto A y que tenga la misma dirección que el vector \vec{b} .
 - d. ¿Se puede afirmar que la recta L y el vector \vec{b} tienen el mismo sentido? Explica a tu compañero cómo argumentas tu respuesta.
3. Considera solo la gráfica para responder:
 - a. ¿Se puede determinar siempre una recta, conocido un punto de ella y que tenga la misma dirección que un vector dado?
 - b. ¿Cómo se podría obtener la ecuación de dicha recta con la misma información? Conjetura.

LA ECUACIÓN VECTORIAL

1. En GeoGebra, dibuja el punto A , el vector de posición \vec{a} , el vector \vec{b} y la recta L .
2. Desde A copia el vector \vec{b} . En GeoGebra lo puedes arrastrar fácilmente.
 - a. ¿Cuáles son ahora las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de \vec{b} ?

Tabla 1: Componentes y coordenadas del vector \vec{b}

Componentes de \vec{b}	Coordenadas Punto inicial de \vec{b}	Coordenadas Punto terminal de \vec{b}
$\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$A(\quad ; \quad)$	$C_1(\quad ; \quad)$

- b. Dibuja el vector posición \vec{c}_1 del punto C_1 .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}_1 ? ¿Cómo se puede obtener el vector \vec{c}_1 a partir de los vectores \vec{a} y \vec{b} ?

3. Desde A copia el vector $2\vec{b}$.
- a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de $2\vec{b}$?

Tabla 2: Componentes y coordenadas del vector $2\vec{b}$

Componentes de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $2\vec{b}$
$2\vec{b} = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$	$A(\ ; \)$	$C_2(\ ; \)$

- b. Dibuja el vector posición \vec{c}_2 del punto C_2 .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores \vec{a} , $2\vec{b}$ y \vec{c}_2 ? ¿Cómo se puede obtener el vector \vec{c}_2 a partir de los vectores \vec{a} y $2\vec{b}$?
4. Desde A copia el vector $-\vec{b}$.
- a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de $-\vec{b}$?

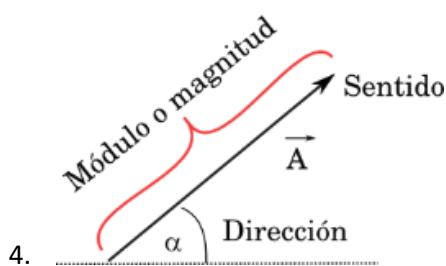
Tabla 3: Componentes y coordenadas del vector $-\vec{b}$

Componentes de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $-\vec{b}$
$-\vec{b} = \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$	$A(\ ; \)$	$C_3(\ ; \)$

- b. Dibuja el vector posición \vec{c}_3 del punto C_3 .
- c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}_3 ? ¿Cómo se puede obtener el vector \vec{c}_3 a partir de los vectores \vec{a} y \vec{b} ? Explica tu procedimiento a tu compañero, destacando los pasos que te parecen más importantes o que se puede volver a usar en otros casos.
5. Generaliza: ¿cómo se obtiene el vector de posición de un punto cualquiera sobre la recta, a partir de los vectores \vec{a} y \vec{b} ?
- a. Completa:
- $$\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$
- b. ¿Qué diferencia hay entre un punto de esta recta y la posición vectorial de dicho punto en la recta? Explica.
6. Usando la ecuación anterior (llamada ecuación vectorial), ¿cómo puedes obtener las coordenadas de un punto cualquiera sobre la recta? Justifica.
7. Prueba dando valores específicos a k .

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Note que aquí el estudiante caracterizará una recta en el plano cartesiano, a partir de un punto de la recta y un vector con la misma dirección. Dado que la ecuación de la recta está dada en términos de vectores y no de puntos en el plano, surge el concepto de ecuación vectorial de una recta.
2. Se sugiere apoyarlos para que diferencien el vector posición con el punto terminal, dado que hay coincidencia en términos numéricos. Son objetos geométricos diferentes y la notación puede ayudar a la comprensión: en el caso del punto las coordenadas, se escriben como $A(x; y)$ y en el caso del vector, las componentes se escriben como $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. Para establecer la diferencia entre dirección y sentido, se sugiere repasar la definición de vector. Un esquema que puede ayudar es:



5. También se requiere comprender que una recta no tiene sentido, por lo que se puede comparar con un vector solo considerando la dirección.
6. En la segunda parte, se sugiere usar GeoGebra para visualizar de forma rápida muchos casos de " $k\vec{b}$ "; incluso se puede construir un applet en GeoGebra, implementando un deslizador para k . Si no se cuenta con el software, la actividad se puede hacer perfectamente, solo que la cantidad de casos (valores distintos de k) que pruebe cada alumno será mucho más limitada.
7. En el punto (5), se espera que completen con la expresión $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$, donde $k \in \mathbb{R}$.
8. Se sugiere enfatizar que la ecuación vectorial corresponde a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Después de determinar la ecuación vectorial, se puede usar para establecer un punto específico perteneciente a la recta.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
 - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
- Tutorial y explicación de cómo obtener una ecuación vectorial, dado un punto y un vector
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=RV3TFyVrYBs>