

### GUIÓN DE USO

### Volumen del cono

#### Palabras clave

Cono, cuerpo redondo, cilindro, volumen, red del cono recto, red del cilindro recto, conjetura, Arquímedes, aproximación, exhaustión.

#### **OAN°7 Primero Medio**

Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono:

- desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie
- experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono
- aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria

#### Presentación

El propósito de esta actividad es introducir la manera de determinar el volumen del cono a partir del volumen conocido de un cilindro cuando ambos tienen la misma altura y la misma base circular.

La estrategia utilizada se basa en la visualización concreta y luego pictórica del vaciado del volumen  $V_{Co}$  de cada uno de tres conos en un cilindro de volumen  $V_{Ci}$  con misma altura y mismo radio basal. Esta parte, se inicia buscando esta relación a través del uso del material manipulable construido por los mismos estudiantes a partir de las redes de un cono y de un cilindro adecuados para explorar esta igualdad. Se prosigue a través de una verificación de la relación hallada con un recurso digital y, finalmente, se termina formalizando los hallazgos a través de la expresión algebraica que denota el volumen del cono en general, seguida por algunos ejercicios de aplicación de dicha fórmula y de su relación con el volumen del cilindro respectivo.

El trasvase manual del volumen de un cono en un cilindro es una manera concreta de visualizar la relación que se utilizará para determinar el volumen del cono. Su posterior visualización en los recursos digitales propuestos en las actividades que siguen y la posterior formalización en lenguaje algebraico del volumen del cono, es una secuencia sugerida que utiliza la estrategia COPISI (Concreto-Pictórico-Simbólico) en este aprendizaje.

En esta actividad se requieren los siguientes materiales:

- Un proyector digital
- Redes del cono y del cilindro impresas en papel o en cartulina. La cantidad sugerida depende de si se trabajará en grupos o individualmente
- Tijeras para papel
- Algún tipo de pegamento
- Material granulado (arroz, arena seca u otro similar)

## Organización de la actividad

La actividad se organiza en etapas sucesivas, las que progresivamente transitan de lo concreto a través de materiales manipulativos, pasando por lo pictórico a través de recursos digitales especialmente adaptados y arribando a la formalización de la expresión algebraica para el volumen de un cono, y su relación con el volumen de un cilindro de similares medidas en que se funda.

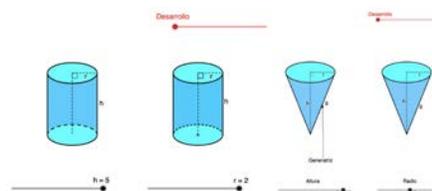
### Gestión en aula tradicional

Para la gestión en aula tradicional de esta actividad, se sugiere trabajar en grupos para disminuir la cantidad de material manipulativo que los estudiantes deben construir (a partir de las redes del cono y del cilindro disponibles en aula) y el material granulado que se utilizará para la actividad del trasvasije (arroz, arena seca u otro material similar). También se sugiere tener un proyector digital que permita al docente mostrar de forma plenaria los recursos digitales asociados a esta actividad.

La actividad parte con preguntas iniciales, las que se pueden plantear a los estudiantes para introducirlos en la temática que se tratará en la clase y para ir anticipando la actividad que tendrán durante la clase.

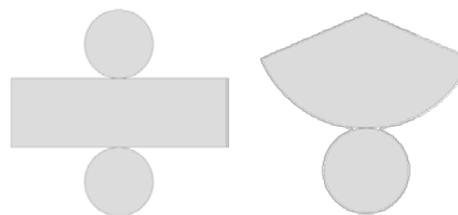
El trabajo de los estudiantes parte con la idea que puedan descubrir la relación entre los volúmenes del cono y del cilindro de forma manual o concreta, utilizando las redes planas del cilindro y del cono disponibles en aula, con las que deben armar los respectivos cuerpos.

La relación entre la red plana y el respectivo cuerpo que permite armar, se muestra en dos recursos digitales, uno para el cono y otro para el cilindro, los que transforman cada cuerpo en su respectiva red plana o viceversa cuando el usuario mueve el deslizador “Desarrollo” en el recurso digital.



La posibilidad de que algún estudiante o el docente pueda interactuar con los recursos digitales<sup>1</sup> proyectados de forma plenaria en el aula, permitirá ayudar a los estudiantes con la forma en que deben construir el cono y el cilindro a partir del recorte de las redes planas del cono y del cilindro disponibles en papel en el aula.

Para construir los cuerpos, se pueden imprimir sus respectivas redes a partir de las que se proporcionan en Anexo al final de la guía del alumno. Se sugiere imprimirlas en un material flexible como papel, cartulina u otro y que el armado facilite pegar las piezas de modo que permita al cuerpo tener la rigidez suficiente para recibir el material granulado.



<sup>1</sup> Los recursos digitales utilizados son adaptaciones de recursos seleccionados del repositorio de recursos para el Aula de GeoGebra.

El recurso digital del CILINDRO fue adaptado de “Desarrollo, áreas y volumen del cilindro”, encontrado en la cuenta personal de Antonio Comino en el sitio web de recursos de GeoGebra y disponible en <https://www.geogebra.org/m/BFHkAGXq>

El recurso digital del CONO fue adaptado de “Desarrollo, áreas y volumen del cono”, encontrado en la cuenta personal de Antonio Comino y disponible en <https://www.geogebra.org/m/BFHkAGXq>

Es importante que cuando se construyan ambos cuerpos, éstos no tengan “tapa”, es decir, que el cilindro no tenga una de sus bases y que el cono no tenga su base circular, para que los estudiantes puedan llenarlos con el material granulado de forma rasante.

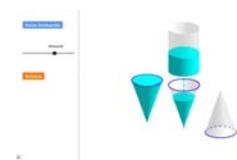
Los estudiantes deben trasvasiar el material granulado que llena al cono ( y que representa concretamente su volumen  $V_{Co}$ ), en el cilindro hasta que éste se llene, debiendo ajustar el material granulado en el cilindro para que quede rasante también. El cilindro debe llenarse con el material granulado (de forma rasante) con tres trasvasijos del cono, debiendo los estudiantes hallar esta relación. Se debe recordar también que la manipulación concreta de este tipo de material granulado puede conllevar a errores de aproximación habituales en las mediciones concretas que se realizan generalmente, por lo que la prolijidad es una actitud recomendable.

Se sugiere cerrar esta parte de la actividad cuando los estudiantes tienen un consenso de que la relación entre el volumen  $V_{Ci}$  del cilindro y el volumen  $V_{Co}$  del cono a través de frases o símbolos que indique que el volumen del segundo es tres veces el del primero, debiendo justificar esto a través de la experimentación realizada. Esto se puede resumir en una expresión como ésta:  $V_{Ci} = 3V_{Co}$ .

La actividad de los estudiantes prosigue viendo plenariamente el recurso digital que muestra de forma animada el vaciado del volumen de un cilindro en tres conos<sup>2</sup>.

Este recurso digital permite visualizar dinámicamente, cómo el volumen de un cilindro puede dividirse en tres conos congruentes que tienen su misma altura y su misma base, moviendo el deslizador “Animación” o presionando el botón “Inicia animación”.

Se subentiende que el cilindro y los conos tienen paredes de un espesor insignificante.



Con la visualización de este recurso digital, se sugiere reforzar el hallazgo hecho por los estudiantes acerca de la relación entre el volumen del cilindro y el del cono representado por  $V_{Ci} = 3V_{Co}$ . A partir de esto, se puede deducir con mayor formalidad que el volumen  $V_{Co}$  del cono es un tercio del volumen  $V_{Ci}$  del cilindro, lo que lleva a la igualdad  $V_{Co} = \frac{1}{3}V_{Ci}$ . Este paso es importante, pues permite establecer la relación a partir de la que se deducirá la fórmula del volumen del cono.

En la parte final, se presenta al estudiante una formalización a partir de la expresión  $V_{Co} = \frac{1}{3}V_{Ci}$ , considerándose conocida la expresión que permite calcular el volumen de un cilindro circular recto de altura  $h$  y radio basal  $r$ , para así llegar a la conocida expresión para el volumen de un cono circular recto de altura  $h$  y radio basal  $r$ :

$$V_{Co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

A continuación, se proponen algunos ejercicios para consolidar la relación  $V_{Ci} = 3V_{Co}$  y para utilizar la nueva expresión para el volumen del cono:  $V_{Co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

¡Gracias!, esperamos haberle proporcionado recursos que apoyan su labor.

<sup>2</sup> Este recurso digital fue adaptado de “Volumen del cono”, encontrado en la cuenta personal de Leopoldo Aranda Murcia en el sitio web de recursos de GeoGebra y está disponible en <https://www.geogebra.org/m/c8f4Mg3V>