nombre

curso fecha

PAUTA ACTIVIDADES: IDENTIFICANDO PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Simón y Antonia están trabajando con las potencias y han comenzado a establecer algunas regularidades en el desarrollo de ejercicios. Observe detenidamente lo que han hecho, responda las preguntas y encuentre las reglas.

I. Multiplicación de potencias

1. Simón y Antonia realizaron se vieron enfrentados al siguiente ejercicio:

$$5^2 \bullet 5^4$$

a) Decidieron resolver las potencias por separado: $(5 \bullet 5) \bullet (5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5) = 25 \bullet 625 = 15.625$

¿Por qué han resuelto las potencias de esta manera?

Porque aplicaron la definición de potencia, entonces multiplicaron las bases tantas veces como indica el exponente.

b) Luego se dieron cuenta de que el número 5 se repetía una cierta cantidad de veces, por lo cual, podían escribir la multiplicación como 5^6 y así encontrar la respuesta.

¿Qué observaron para determinar que podían escribir la multiplicación como 5^6?

Al observar el desarrollo de las potencias, es posible darse cuenta de que el número 5 se repite 6 veces y que siempre está multiplicando; por ello lo han escrito como 5^6

Simón siguió observando la conclusión que encontraron y se dio cuenta de lo siguiente:

$$5^2 \bullet 5^4 = 5^{(2+4)} = 5^6 = 15.625$$

2. Siguiendo la lógica de Simón y Antonia, verifique si la conclusión se cumple en los siguientes casos. Utilice calculadora para encontrar el valor de la potencia.

Multiplicación	Desarrollo	Escrito como una sola potencia
$7^3 \bullet 7^4$	$(7 \bullet 7 \bullet 7) \bullet (7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7) = 343 \bullet 2.401 = 823.543$	*$7^{(3+4)}$* *7^7=823.543*
$3^8 \bullet 3^3$	$(3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3) \bullet (3 \bullet 3 \bullet 3) = 6.561 \bullet 27 = 177.147$	*$3^{(8+3)}$* *3^{11}= 177.147*
$6^3 \bullet 6^2$	$(6 \bullet 6 \bullet 6) \bullet (6 \bullet 6) = 216 \bullet 36 = 7776$	*$6^{(3+2)}$* *6^5 = 7.776*
$8^3 \bullet 8^2$	$(8 \bullet 8 \bullet 8) \bullet (8 \bullet 8) = 512 \bullet 64 = 32.768$	*$8^{(3+2)}$* *8^5 = 32.768*
$2^2 \bullet 2^5 \bullet 2^4$	$(2 \bullet 2) \bullet (2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2) \bullet (2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2) = 4 \bullet 32 \bullet 16 = 2048$	*$2^{(2+5+4)}$* *2^{11}= 2048*

3. De acuerdo al desarrollo de los ejercicios de la tabla, conteste:

a) ¿En todos los casos presentados en la tabla es válida la conclusión de Simón?

Sí.

b) ¿Por qué ocurrirá esa relación con los exponentes de las potencias?

Porque al desarrollar las potencias, tengo una multiplicación iterada, de acuerdo a la cantidad que indica el exponente, por ello se pueden sumar los exponentes.

c) ¿Cómo son las bases de las potencias que se están multiplicando? ¿Y los exponentes?

Las bases son iguales y los exponentes distintos.

d) ¿Es posible aplicar la conclusión de Simón en un ejercicio como este: $4^2 \bullet 3^3$? ¿Por qué?

Si desarrollamos la multiplicación presentada, tenemos $(4 \bullet 4) \bullet (3 \bullet 3 \bullet 3) = 16 \bullet 27 = 432$ *en este caso no es posible aplicar la conclusión de Simón, ya que al ser las bases distintas, estas se repiten la cantidad de veces que indican sus respectivos exponentes, por lo tanto, es necesario resolver las potencias por separado.*

e) De acuerdo a su respuesta anterior y los ejercicios desarrollados en la tabla, ¿qué características deben tener las potencias para poder aplicar la conclusión de Simón?

Tiene que ocurrir que las potencias que se están multiplicando tengan la misma base.

f) Utilizando lenguaje matemático, escriba la conclusión que obtuvo Simón y que usted ha verificado en los ejercicios anteriores.

Multiplicación de potencias de igual base:

Se mantiene la base y se suman los exponentes:

g) $a^n \bullet a^m = a^{(n+m)}$

4. Siguiendo con su trabajo con las potencias, ahora Simón y Antonia resolvieron esta multiplicación:

$$6^2 \bullet 7^2$$

a) Decidieron resolver las potencias por separado: $(6 \bullet 6) \bullet (7 \bullet 7)$

¿Por qué han resuelto las potencias de esta manera?

Porque aplicaron la definición de potencias y desarrollaron cada potencia de acuerdo a lo que indica el exponente.

b) Antonia resolvió el ejercicio de la siguiente manera: $(6 \bullet 7) \bullet (6 \bullet 7)$

¿Por qué Antonia escribió el ejercicio de ese modo?

Antes de resolver, Antonia se dio cuenta de que podía multiplicar cada término del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis y es el desarrollo que realizó.

c) Al escribirlo de acuerdo a lo presentado en el punto dos, se dio cuenta de que podía expresar la multiplicación como $(6 \bullet 7)^2$

¿Por qué Antonia concluyó que puede escribir el ejercicio como $(6 \bullet 7)^2$?

Porque al realizar el paso anterior, obtiene la misma multiplicación dos veces.

5. Siguiendo la lógica de Simón y Antonia, verifique si la conclusión se cumple en los siguientes casos. Utilice calculadora para encontrar el valor de la potencia.

Multiplicación	Desarrollo	Escrito como una sola potencia
$4^3 \bullet 3^3$	$(4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (3 \bullet 3 \bullet 3) = (4 \bullet 3) \bullet (4 \bullet 3) \bullet (4 \bullet 3) =$ $12 \bullet 12 \bullet 12 = 1728$	$(4 \bullet 3)^3$ *12^3 = 1728*
$8^5 \bullet 2^5$	$(8 \bullet 8 \bullet 8 \bullet 8 \bullet 8) \bullet (2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2) =$ $(8 \bullet 2) \bullet (8 \bullet 2) \bullet (8 \bullet 2) \bullet (8 \bullet 2) \bullet (8 \bullet 2) =$ $16 \bullet 16 \bullet 16 \bullet 16 \bullet 16 = 1.048.576$	$(8 \bullet 2)^5$ *16^5=1.048.576*
$9^4 \bullet 6^4$	$(9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9) \bullet (6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6) =$ $(9 \bullet 6) \bullet (9 \bullet 6) \bullet (9 \bullet 6) \bullet (9 \bullet 6) =$ $54 \bullet 54 \bullet 54 \bullet 54 = 8.503.056$	$(9 \bullet 6)^4$ *54^4= 8.503.056*
$5^2 \bullet 7^2$	$(5 \bullet 5) \bullet (7 \bullet 7) = (5 \bullet 7) \bullet (5 \bullet 7) = 35 \bullet 35 = 1.225$	$(5 \bullet 7)^2$ *35^2 = 1.225*
$6^3 \bullet 4^3 \bullet 2^3$	$(6 \bullet 6 \bullet 6) \bullet (4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (2 \bullet 2 \bullet 2) =$ $(6 \bullet 4 \bullet 2) \bullet (6 \bullet 4 \bullet 2) \bullet (6 \bullet 4 \bullet 2) =$ $48 \bullet 48 \bullet 48 = 110.592$	$(6 \bullet 4 \bullet 2)^3$ *48^3 = 110.592*

6. De acuerdo al desarrollo de los ejercicios de la tabla, conteste:

a) ¿En todos los casos presentados en la tabla es válida la conclusión de Antonia?

Sí.

b) ¿Por qué ocurrirá esa relación con las bases de las potencias?

Porque al desarrollar las potencias, tenemos una multiplicación iterada de las bases, tantas veces como indican los exponentes.

c) ¿Cómo son las bases de las potencias que se están multiplicando? ¿Y los exponentes?

Las bases son distintas y los exponentes iguales.

d) ¿Es posible aplicar la conclusión de Simón en un ejercicio como este: $4^2 \bullet 3^3$? ¿Por qué?

Si desarrollamos el ejercicio, tenemos:

$4^2 \bullet 3^3 = (4 \bullet 4) \bullet (3 \bullet 3 \bullet 3) = (4 \bullet 3) \bullet (4 \bullet 3) \bullet 3$;

Por lo tanto, en este caso no es válida la conclusión, ya que los exponentes son distintos. Por ende, al multiplicar cada término del primer paréntesis por los términos del segundo paréntesis, no hay la misma cantidad.

e) De acuerdo a su respuesta anterior y los ejercicios desarrollados en la tabla, ¿qué características deben tener las potencias para poder aplicar la conclusión de Antonia?

Para poder aplicar la conclusión de Antonia, las potencias deben tener distinta base e igual exponente.

f) Utilizando lenguaje matemático, escriba la conclusión que obtuvo Simón y que usted ha verificado en los ejercicios anteriores.

Multiplicación de potencias de igual exponente:

Se multiplican las bases y se mantiene el exponente:

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$$

II. División de potencias

1. Luego del trabajo con las multiplicaciones, Simón y Antonia pensaron que también podían llegar a establecer conclusiones con la división de potencias. Observe el siguiente ejercicio:

$$4^6 \div 4^4$$

a) En este caso, decidieron escribir la división, utilizando las fracciones:

$$\frac{4 \bullet 4 \bullet \cancel{4} \bullet \cancel{4} \bullet \cancel{4} \bullet \cancel{4}}{\cancel{4} \bullet \cancel{4} \bullet \cancel{4} \bullet \cancel{4}}$$

¿Por qué escribieron la división como fracción? ¿Por qué simplificaron?

Porque una fracción corresponde a una división: En este caso se puede simplificar porque tanto en el numerador como en el denominador hay solo multiplicaciones y tienen términos en común.

b) La división se redujo a 4^2

¿Por qué la división original se redujo a 4^2?

Porque quedaron en el numerador dos cuatros, por ello se reduce a 4^2

Observaron detenidamente los números que estaban utilizando y concluyeron que:

$$4^6 \div 4^4 = 4^{(6-4)} = 4^2$$

2. Siguiendo la lógica de Simón y Antonia, verifique si la conclusión se cumple en los siguientes casos. Utilice calculadora para encontrar el valor de la potencia.

División	Desarrollo	Escrito como una sola potencia
$9^7 \div 9^5$	$\frac{9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9}{9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9} = \frac{4782969}{59049} = 81$	*$9^{(7-5)}$* *9^2=81*
$8^6 \div 8^2$	$\frac{8 \bullet 8 \bullet 8 \bullet 8 \bullet 8 \bullet 8}{8 \bullet 8} = \frac{262144}{64} = 4.096$	*$8^{(6-2)}$* *8^4= 4.096*
$5^9 \div 5^3$	$\frac{5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5}{5 \bullet 5 \bullet 5} = \frac{1953125}{125} = 15625$	*$5^{(9-3)}$* *5^6=15.625*
$7^8 \div 7^4$	$\frac{7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7}{7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7} = \frac{5764801}{2401} = 2401$	*$7^{(8-4)}$* *7^4= 2401*

3. De acuerdo al desarrollo de los ejercicios de la tabla, conteste:

a) ¿En todos los casos presentados en la tabla es válida la conclusión de Simón y Antonia?

Sí

b) ¿Por qué ocurrirá esa relación con los exponentes de las potencias?

Porque en estos casos tengo multiplicaciones iteradas asociadas a una división, entonces se puede simplificar.

c) ¿Cómo son las bases de las potencias que se están dividiendo? ¿Y los exponentes?

Las bases son iguales y los exponentes distintos.

d) ¿Es posible aplicar la conclusión de Simón y Antonia en un ejercicio como este: $9^4 \div 5^2$? ¿Por qué?

Si desarrollamos el ejercicio $9^4 \div 5^2 = \dfrac{9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9}{5 \bullet 5} = \dfrac{6561}{25} = 262{,}44$*, en este caso no es posible simplificar, por lo tanto, debemos resolver las potencias por separado y luego la división.*

e) De acuerdo a su respuesta anterior y los ejercicios desarrollados en la tabla, ¿qué características deben tener las potencias para poder aplicar la conclusión de Simón y Antonia?

Las potencias deben tener igual base y distinto exponente.

f) Utilizando lenguaje matemático, escriba la conclusión que obtuvo Simón y Antonia y que usted ha verificado en los ejercicios anteriores.

División de potencias de igual base:

Se mantiene la base y se restan los exponentes:

$$a^n \div a^m = a^{(n-m)}$$

4. Luego resolvieron el siguiente ejercicio:

$$27^3 \div 9^3$$

En este caso, decidieron escribir la división, utilizando las fracciones:

$\dfrac{27 \bullet 27 \bullet 27}{9 \bullet 9 \bullet 9}$, observando que tenían la misma división tres veces.

De lo anterior, escribieron la división original como $\left(\dfrac{27}{9}\right)^3$, es decir, 3^3.

5. Siguiendo la lógica de Simón y Antonia, verifique si la conclusión se cumple en los siguientes casos. Utilice calculadora para encontrar el valor de la potencia.

División	Desarrollo	Escrito como una sola potencia
$28^2 \div 14^2$	$\frac{28 \bullet 28}{14 \bullet 14} = \frac{784}{196} = 4$	$\left(\frac{28}{14}\right)^2 = 2^2$ *2^2=4*
$21^4 \div 7^4$	$\frac{21 \bullet 21 \bullet 21 \bullet 21}{7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7} = \frac{194481}{2401} = 81$	$\left(\frac{21}{7}\right)^4 = 3^4$ *3^4=81*
$30^3 \div 6^3$	$\frac{30 \bullet 30 \bullet 30}{6 \bullet 6 \bullet 6} = \frac{27.000}{216} = 125$	$\left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3$ *5^3=125*
$42^5 \div 7^5$	$\frac{42 \bullet 42 \bullet 42 \bullet 42 \bullet 42}{7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7 \bullet 7} = \frac{130691232}{16807} = 7776$	$\left(\frac{42}{7}\right)^5 = 6^5$ *6^5=7776*

6. De acuerdo al desarrollo de los ejercicios de la tabla, conteste:

a) ¿En todos los casos presentados en la tabla es válida la conclusión de Simón y Antonia?

Sí.

b) ¿Por qué ocurrirá esa relación con las bases de las potencias que se están dividiendo?

Porque al desarrollar las potencias, tenemos una multiplicación iterada según lo que indica el exponente, asociada a una división; por ello podemos dividir las bases.

c) ¿Cómo son las bases de las potencias que se están dividiendo? ¿Y los exponentes?

Las bases son distintas y los exponentes iguales.

d) ¿Es posible aplicar la conclusión de Simón y Antonia en un ejercicio como este: $9^4 \div 5^2$? ¿Por qué?

Si desarrollamos el ejercicio $9^4 \div 5^2 = \left(\frac{9 \bullet 9 \bullet 9 \bullet 9}{5 \bullet 5}\right) = \frac{6561}{25} = 262{,}44$ *no se encuentra la misma división varias veces; por lo tanto, no podemos aplicar la conclusión encontrada por Simón y Antonia.*

e) De acuerdo a su respuesta anterior y los ejercicios desarrollados en la tabla, ¿qué características deben tener las potencias para poder aplicar la conclusión de Simón y Antonia?

Las bases deben ser distintas y los exponentes iguales.

f) Utilizando lenguaje matemático, escriba la conclusión que obtuvo Simón y Antonia y que usted ha verificado en los ejercicios anteriores.

División de potencias de igual exponente:

Se dividen las bases y se mantienen los exponentes:

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

III. Potencia de una potencia

1. Simón y Antonia resolvieron un último ejercicio:

$$\left(4^3\right)^5$$

a) Lo fueron resolviendo, paso a paso, partiendo por el paréntesis: $(4 \bullet 4 \bullet 4)^5$

b) Ahora desarrollaron la última potencia:

$$(4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (4 \bullet 4 \bullet 4) \bullet (4 \bullet 4 \bullet 4)$$

c) Se dieron cuenta de que la base 4 aparece 15 veces; es decir, que la potencia $\left(4^3\right)^5 = 4^{15}$

d) Simón y Antonia trataron de establecer una conclusión y se dieron cuenta que $3 \bullet 5 = 15$ que corresponde a la multiplicación de los exponentes.

2. Verifique si la conclusión de Simón y Antonia se cumple en los casos siguientes. Utilice la calculadora para resolver la potencia.

Potencia de una potencia	Desarrollo	Escrito como una sola potencia
$\left(5^2\right)^3$	$(5 \bullet 5)^3 = (5 \bullet 5)^3 = 25^3 = 15.625$	$5^{(2 \bullet 3)} = 5^6$ *5^6=15.625*
$\left(3^3\right)^5$	$(3 \bullet 3 \bullet 3)^5 = 27^5 = 14348907$	$3^{(3 \bullet 5)} = 3^{15}$ *3^{15}=14348907*
$\left(2^6\right)^2$	$(2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2)^2 = 64^2 = 4.096$	$2^{(6 \bullet 2)} = 2^{12}$ *2^{12} = 4.096*

3. De acuerdo al desarrollo de los ejercicios de la tabla, conteste:

a) ¿En todos los casos es válida la conclusión de Antonia y Simón?

Sí.

b) ¿Por qué ocurrirá esa relación con los exponentes de las potencias presentadas en los ejercicios de la tabla?

Porque al desarrollar la potencia, tenemos una multiplicación iterada tantas veces como indican los exponentes.

c) Escriba la conclusión de Simón y Antonia, utilizando lenguaje matemático.

Potencia de una potencia:

Se mantiene la base y se multiplican los exponentes:

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{(n \bullet m)}$$

Elaborado por: Carolina Pizarro Salgado