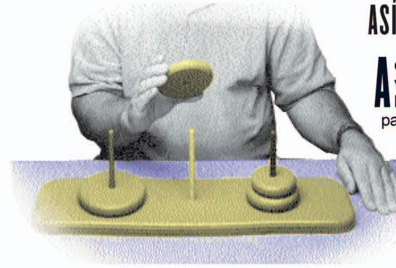
¿CUÁNTO DURARÁ EL MUNDO?

Lo que aparentemente es sólo un juego puede convertirse en un valioso modelo donde estudiar difíciles temas matemáticos. Un caso estrella es el del juego de las Torres de Hanoi, inventado en 1883 por el matemático francés Edouard Lucas, que se hizo muy famoso a finales del siglo XIX por la creación de una preciosa leyenda. Con el tiempo, la computabilidad hizo uso del juego para estudiar nada menos que la eficiencia de algoritmos.

por Lolita Brain

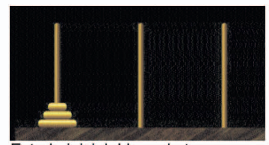
LA LEYENDA

Cuenta la leyenda que en Benarés (India), el Dios creador Brahma entregó a los monjes tres vástagos diamantinos sobre una base de bronce. Ensartó entonces 64 discos de oro, todos de dimensiones distintas, en una de las varillas, dispuestas de modo que el mayor estuviera en la base y los discos fueran decreciendo en tamaño. Y ordenó a los monjes que moviesen toda la Torre de Brahma a otro de los vástagos, de modo que en cada traslado sólo fuese movido un disco dorado, y de manera tal que nunca un disco tuviera debajo otro de menor tamaño. Al final sentenció: "*Cuando hayáis acabado la tarea, el mundo se vendrá abajo como montaña de polvo*".



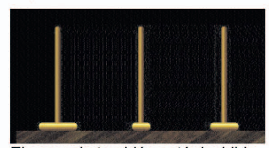
ASÍ SE JUEGA

A continuación puedes ver una solución de las Torres de Hanoi, para el caso de tres discos. Son necesarios **siete** movimientos como mínimo para resolver este sencillo ejemplo.

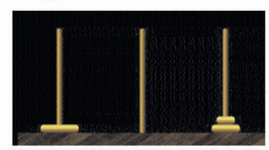


Estado inicial. Llevar la torre a un vástago vacío.

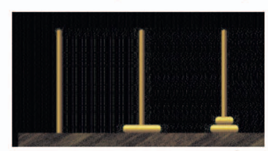
El primer movimiento es obvio.



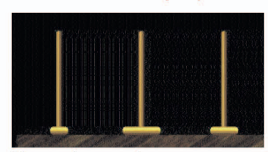
El segundo también está decidido.



Hacemos sitio para mover el mayor.



Movemos el disco mayor. ¡Por fin!

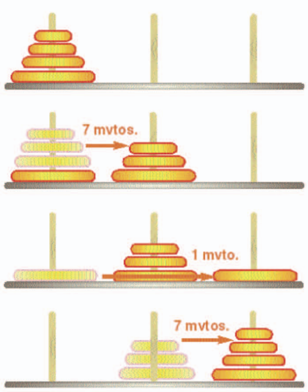


Ahora volvemos al paso uno.

Repetimos el paso dos y ¡ya está!

¿POR QUÉ ES RECURSIVO ESTE JUEGO?

Para que comprendamos por qué este juego puede resolverse recursivamente, vamos a fijarnos en una Torre de Hanoi con cuatro discos y vamos a solucionarlo utilizando el procedimiento que conocemos para el de tres elementos. De este modo, para resolver una torre de cuatro se necesita solucionar la de tres discos. A su vez, la solución de la torre de tres elementos se reduce a la de dos. Ésta es la recursividad.



Éste es el estado inicial del juego con cuatro discos.

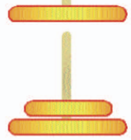
Tras siete movimientos conseguimos mover tres discos a otro vástago. La pieza mayor no se ha movido todavía.

En un movimiento llevamos el disco mayor al vástago vacío.

Con siete movimientos más llevamos la pila de tres discos sobre el de mayor tamaño. El juego ha terminado.

¿TENÍA RAZÓN BRAHMA?

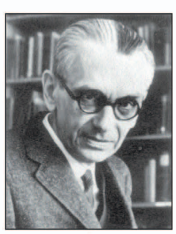
Según la leyenda, el mundo duraría el tiempo invertido por los monjes en resolver una Torre de Hanoi de 64 discos. Si bien solucionar el juego no es muy difícil, el número de movimientos necesarios para hacerlo crece exponencialmente conforme aumenta la cantidad de discos. Contemos utilizando la recursividad de la solución.

Nº DE DISCOS	Nº MÍNIMO DE MOVIMIENTOS
	$1=2^0$
	2 TORRES DE 1 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $1+1+1=3=2^2-1$
	2 TORRES DE 2 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $3+1+3=7=2^3-1$
	2 TORRES DE 3 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $7+1+7=15=2^4-1$
	2 TORRES DE 4 + 1 MOVIMIENTO DEL DISCO MAYOR $15+1+15=31=2^5-1$

Si los discos son 64, como en la leyenda, se necesitan $2^{64}-1=18.446.744.073.709.551.615$ movimientos. Invirtiendo un segundo por movimiento y dedicando 24 horas al día se necesitarían casi 6.000 millones de siglos.

LA RECURSIVIDAD Y LA LÓGICA

Cuando desde el primer tercio del siglo XX, los matemáticos se adentraron en la computabilidad y en la automatización del razonamiento, encontraron un tipo especial de funciones, las llamadas funciones recursivas primitivas, a partir de las cuales es posible construir todo el acervo matemático computable. Por supuesto, estas funciones son recursivas no sólo por su nombre.



KURT GÖDEL (1906 -1978)

Un procedimiento se llama algorítmico si puede mecanizarse a través de un conjunto finito de instrucciones elementales y fijadas de antemano. Por ejemplo, cómo preparar un plato culinario o bien la forma que inventó Euclides para calcular el máximo común divisor.

El proceso algorítmico se denomina recursivo cuando su ejecución requiere de la repetición similar de pasos, en cada uno de los cuales el procedimiento se *llama* a sí mismo para ejecutarse, pero sobre valores menores de algún parámetro. Es similar a los fenómenos autorreferentes.