2º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 24

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

En esta clase reforzaremos el concepto de logaritmo y sus propiedades.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

En la clase anterior vimos la definición de logaritmo:

Se llama **logaritmo** de un número en una base dada el número al cual debe elevarse la base para obtener dicho número. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, c \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, podemos calcular, por ejemplo:

a) $\log_3 9 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2$

b) $\log_{16} 2 \rightarrow 16^x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

Aplica el concepto para calcular el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_7 49 =$

c) $\log_{81} 3 =$

d) $\log_2 \frac{1}{32} =$

Recordemos que, en un logaritmo, cada vez que no aparece escrita su base, significa que es de base 10.
Analicemos las siguientes propiedades:

En las operaciones con logaritmos se verifican las siguientes propiedades, con $a > 0$ y $a \neq 1$:

- Logaritmo de la base:

$$\log_a (a) = 1$$

- Logaritmo de la unidad:

$$\log_a (1) = 0$$

- Logaritmo de una potencia:

$$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a (x), \text{ con } x > 0, y \in \mathbb{R}$$

- Logaritmo de un producto:

$$\log_a (xy) = \log_a (x) + \log_a (y), \text{ con } x > 0, y > 0$$

- Logaritmo de un cociente:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y), \text{ con } x > 0, y > 0$$

También, debemos recordar que:

$$\log_a 0 = \nexists$$

Ejemplos:
Si Log 2 = 0,3 ; Log 3 = 0,47 y Log 5 = 0,7; entonces:

a) Log20 = Log 4x5 = Log4 + Log5 = 2Log2 + Log5= 2x0,3 + 0,7 =1,3

b) Log $\left(\frac{3}{5}\right)$ = Log3 – Log5 = 0,47 – 0,7 = -0,23

Considera los ejemplos anteriores y resuelve.

Según los datos: Log 2 = 0,3; Log 3 = 0,47; Log 5 = 0,7; Log 7 = 0,85. Calcula:

a) Log 30=

b) Log 105=

c) Log 2,1=

d) Log 26,25=

Cierre

Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1 **El valor de: $2 \log_3 27 - 4 \log_5 625 + 2 \log 100$, es:**

a) 10
b) 6
c) -6
d) -10

2 **Al resolver $\log_2 40 + \log_2 100 - \log_2 500$, se obtiene:**

a) $10 \log_2 5$
b) $10 \log_2 25$
c) 3
d) 2

3 **Si Log 2 = 0,3; Log 3 = 0,47; Log 5 = 0,7; Log 7 = 0,85, entonces el valor de Log 17,5 es:**

a) 1,25
b) 1,85
c) 0,45
d) 1,98

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

2º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad
1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Tema 3: ¿Qué son los logaritmos?

¿Qué aprenderé?

A comprender qué es un logaritmo y su relación con las potencias y las raíces enésimas.

¿Para qué?

Para representar matemáticamente la relación entre el valor de la potencia y el exponente.

Actividad en pareja

Taller

Observen cómo se puede describir la siguiente relación.

$$4^5 = 1024$$

1024 es la quinta potencia de 4.

La raíz quinta de 1024 es 4.

$4 = \sqrt[5]{1024}$

El logaritmo de 1024 en base 4 es 5.
Es decir, 5 es el número al cual se eleva 4 para obtener 1024.

$\log_4(1024) = 5$

1 En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$2^8 = 256$ $\quad 3^{12} = 531\,441$ $\quad 5^6 = 15\,625$

2 Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10\,000$			
	6	−2	
			$\log_9(1) = 0$
$5^{-3} = 0{,}008$			
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

3 Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.

a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?

b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?

c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente

Grupalmente

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente

Grupalmente

Matemática y ciencia

Escalas logarítmicas

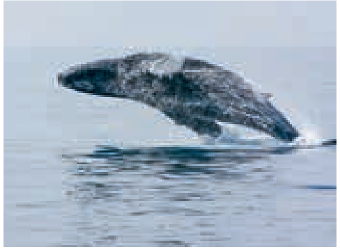
Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversos ámbitos, por ejemplo la de magnitud sísmica de Richter para medir la intensidad de los terremotos y la del pH para medidas de acidez y alcalinidad; o bien en unidades de medida, como los decibelios para el sonido o la magnitud estelar para el brillo de las estrellas. Estas escalas son especialmente pertinentes cuando el rango de datos de que se dispone es muy amplio y cuando los datos tienen (o así parece) una conducta exponencial o potencial.

Por ejemplo, si se considera la masa de los seres vivos, existen grandes diferencias entre los más pequeños y los mayores:

- un dragón de Komodo: 90 kg = 90 000 g $\approx 10^{4,96}$ g
- un rotífero (el menor animal pluricelular): 0,00000000603 g $\approx 10^{-8,22}$ g
- una ballena (el mayor de todos los animales): 120 Tm = 120 000 000 g $\approx 10^{8,08}$ g


Rotífero


Dragón de Komodo


Ballena jorobada

Entonces, para mostrar la relación entre sus masas o intentar graficar estos datos con la misma escala, es un problema que existan tales diferencias entre los valores. Una solución para esto es asignar a cada animal un valor, correspondiente al logaritmo (en base 10) de su masa, al que se le llama el "orden de magnitud". De esta manera, el orden de magnitud del rotífero es –8,22, el del dragón de Komodo es 4,96 y el de la ballena, 8,08.

Con estos valores se puede establecer una escala para la masa de los animales que no sea excesiva. El orden de magnitud de cada animal será un número entre –8 y 8 y se puede clasificar como:

- muy pequeños, los animales de órdenes entre –8 y –5
- pequeños, los que están entre –5 y –2
- medianos, los que están entre –2 y 2
- grandes, los que están entre 2 y 5
- muy grandes, los que están entre 5 y 8.

En un rango pequeño, en este caso de –8 a 8, con esta escala se consigue expresar realidades muy diferentes. Las escalas logarítmicas pueden ser muy útiles, pero ¡cuidado!... solo si se entienden bien. Por ejemplo, cuando se dice que la ballena es de orden 8 y la langosta es de orden 4, no significa que la masa de una ballena sea el doble de la masa de la langosta. De hecho, ya que $10^{8-4} = 10^4 = 10\,000$, esto significa es que la ballena tiene 10 000 veces la masa de la langosta.

En resumen

Se llama **logaritmo** de un número en una base dada el número al cual debe elevarse la base para obtener dicho número. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, c \in \mathbb{R}$$

Matemática e historia

Rara vez en la historia de la ciencia una idea matemática fue recibida con tanto entusiasmo como los logaritmos. Como dijo Laplace: "Al reducir el trabajo, la invención de los logaritmos duplicó la vida de los astrónomos".

Las tablas publicadas en 1624 por Henry Briggs bajo el título *Arithmetica logarithmica* fueron la base (con pequeñas revisiones) de todas las tablas de logaritmos hasta el siglo XX.

Luego, la regla de cálculo, en sus múltiples variantes, sería la fiel compañera de todo científico e ingeniero por casi 350 años.
A principios de la década de 1970, las primeras calculadoras electrónicas portátiles aparecieron en el mercado y en los siguientes diez años la regla de cálculo se volvió obsoleta.

Actividades de práctica

1. Aplicando la definición de logaritmo, comprueba si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5(25) = 2$

b. $\log_2(0{,}25) = 0{,}5$

c. $\log_9(-3) = 2$

d. $\log_1(3{,}78) = 0$

e. $\log(2) = 100$

f. $\log(10) = 1$

g. $\log_4(0{,}25) = -2$

h. $\log_{36}(6) = 0{,}5$

i. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{81}}\right) = -\frac{8}{5}$

j. $\log_{\frac{1}{5}}(125) = -3$

k. $\log(10^5) = 5$

l. $\log_8\left(\sqrt[3]{64}\right) = \frac{3}{2}$

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

a. $9^3 = 729$

b. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

c. $0{,}3^2 = 0{,}09$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

e. $0{,}01^{-2} = 10\,000$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

g. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

3. Determina en cada caso el valor de a.

a. $\log_4(2) = a$

b. $\log_a(8) = 3$

c. $\log_a(2048) = 11$

d. $\log_9(a) = 4$

e. $\log_5(0{,}04) = a$

f. $\log_{\frac{1}{81}}(9) = a$

g. $\log_{\frac{1}{64}}(2) = a$

h. $\log_{0{,}2}(a) = -2$

i. $\log_7(a) = 3$

j. $\log_{1000}(a) = -\frac{1}{3}$

4. Ciencias naturales. Para describir la intensidad del sonido y relacionarla con su magnitud en watts por metro cuadrado (W/m^2) se utilizan los decibeles.
La intensidad en decibeles y la magnitud (I) se relacionan mediante la fórmula

$$dB = 120 + 10 \log(I)$$

a. Analiza las siguientes situaciones y completa la tabla con la magnitud del sonido correspondiente.

Situación	Intensidad del sonido (dB)	Magnitud del sonido (W/m^2)
Pasos en el suelo	10	
Viento en los árboles	20	
Tráfico en hora de congestión	80	
Motocicleta	100	
Despegue de un avión	150	
Explosión	180	

b. Investiga: ¿qué umbrales de sonido, en decibeles, corresponden a un ambiente saludable?, ¿y al comienzo del dolor? Compara con tus compañeros.

c. ¿Cuál es la magnitud del sonido de un equipo de música utilizado en un concierto?, ¿a cuántos decibeles corresponde?

d. Si se sabe que un equipo de sonido tiene una magnitud igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en intensidad?

- ¿Qué recomendaciones existen para el uso de audífonos para escuchar música? ¿Los usas tú en niveles adecuados para tu salud?

¿Qué aprendí hoy?

Un médico detecta que un paciente requiere mantener los niveles de un medicamento en la sangre. La cantidad C de miligramos que hay presentes en ella va disminuyendo con el tiempo t en horas de acuerdo a la relación

$$\log C = 1 - 0{,}087t$$

a. ¿Cuál es la dosis que se administra del medicamento?

b. ¿Al cabo de cuántas horas quedan 0,5 mg del medicamento?

c. ¿Cuántos miligramos quedan en la sangre 8 horas después?

d. Si el medicamento se administra a las 8 A.M. y no debe bajar de 0,3 mg, ¿a qué hora debe recibir la siguiente dosis?

Ayuda

No todas las calculadoras se usan igual, por lo que es necesario que conozcas cómo ingresar los valores según la operación requerida. Para calcular logaritmos de base 10, esencialmente existen tres formas distintas de digitar los números:

Introducir el número, y luego la tecla **log**.

7 log

Presionar la tecla **log** y luego el valor del cual se quiere calcular.

log 7

Presionar la tecla **log**, luego el valor del cual se quiere calcular y al final la tecla **=** o **EXE**.

log 7 =

log 7 EXE

Si quieres calcular el valor de una expresión compuesta, es fundamental respetar la prioridad de las operaciones. En este sentido, se pueden utilizar los paréntesis que ofrece la calculadora científica, considerando que primero calculará el argumento y luego el logaritmo.

Cuaderno página 19

Tema 4: ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

¿Qué aprenderé?

A conocer y comprender las propiedades de las operaciones con logaritmos.

¿Para qué?

Para aplicarlas de manera eficiente y utilizarlas en ecuaciones que contengan logaritmos.

Y él ¿quién es?

John Napier (1550-1617)

Este matemático escocés fue quien definió los logaritmos, método ideado para simplificar el cálculo numérico con el que se redujeron todas las operaciones a la adición y sustracción. Napier publicó finalmente sus resultados en 1614 con el tratado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, fruto de un estudio de veinte años. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.

Actividad en pareja

Taller

Consideren el valor de las siguientes potencias para resolver los ejercicios:

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$	$6^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$6^1 = 6$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$6^4 = 1296$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$6^5 = 7776$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$4^6 = 4096$	$6^6 = 46\,656$

1 Calculen los siguientes logaritmos:

a. $\log_4(4) =$ ______

b. $\log_6(1) =$ ______

c. $\log_3(1) =$ ______

d. $\log_2(2) =$ ______

e. $\log_5(5) =$ ______

f. $\log_4(1) =$ ______

- ¿Qué pueden concluir?

2 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ______ $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$

b. ______ $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$

c. ______ $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$

d. ______ $\log_3(9 \cdot 81) = \log_3(9) + \log_3(81)$

e. ______ $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$

f. ______ $\log_6(1296) + \log_6(36) = \log_6(1296 \cdot 36)$

g. ______ $\log_4(256 \cdot 4) = \log_4(256) + \log_4(4)$

h. ______ $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.