

1º
medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo
con el texto escolar

Clase 22

Matemática



Inicio

En esta clase conoceremos y aplicaremos el producto notable **cuadrado de binomio**.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo



Para cumplir con el objetivo de esta clase, trabajaremos desde las **páginas 74 a la 77** de tu texto de estudio, resolviendo los ejercicios que ahí aparecen.



Estudemos el cuadro de conceptos de la **página 74** de tu texto de estudio:

Conceptos

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1 ¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

Cuadrado del primer término.

Doble del producto de los términos.

Cuadrado del segundo término.

1 $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2 \rightarrow$ Aplicas la definición.

2 $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2 \dots \rightarrow$ Aplicas propiedades de las potencias.

3 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2 \dots \rightarrow$ Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

En la explicación anterior podrás observar que ya no es necesario realizar una multiplicación de polinomios como lo resolvimos en la clase anterior, sino que podemos usar el producto notable **cuadrado de un binomio** en forma directa.



Para comenzar a utilizar el cuadrado de binomio, tomemos como ejemplo el **ejercicio b** del **ítem 2** de la **página 76**.

Resolvamos: $(2 - y)^2$

Analicemos el cuadrado de binomio:

- ✓ El 1º término es 2
- ✓ El 2º término es $(-y)$

Debes considerar **los signos** de cada uno de los términos al momento de aplicar un **producto notable**.

Entonces, tenemos:

- Cuadrado del primer término: $2^2 = 4$
- El doble del producto del primer término con el segundo término: $2 \cdot 2 \cdot -y = -4y$
- Cuadrado del segundo término: $(-y)^2 = y^2$

Juntamos los resultados obtenido:

$$(2 - y)^2 = 4 - 4y + y^2$$

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario de tu texto de estudio**, **página 290**.



Actividad 1:

Resuelve el **ejercicio a** del **ítem 2** de la **página 76**.



Actividad 2:

Completa las tablas del **ítem 1** de la **página 76** y responde las **preguntas a y b**.



Para resolver la siguiente actividad tomaremos como ejemplo el **ejercicio a del ítem 3** de la **página 76**.

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + 3)^2 = a^2 + 6a + \square$

Para poder completar cada uno de los recuadros, debemos analizar el cuadrado de binomio que se presenta.

Analicemos el primer recuadro

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + 3)^2 = a^2 + 6a + \square$

El primer recuadro corresponde al primer término del binomio, donde al aplicar el cuadrado de binomio corresponde al primer resultado de su desarrollo, por lo que si a^2 es el cuadrado del primer término significa que a fue elevado al cuadrado.

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + 3)^2 = a^2 + 6a + \square$

3. Completa cada recuadro.

a. $(\mathbf{a} + 3)^2 = a^2 + 6a + \square$

Ahora veamos el segundo recuadro:

El segundo recuadro corresponde al cuadrado del segundo término del binomio, por lo que debemos identificar el segundo término y elevarlo al cuadrado.

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + \mathbf{3})^2 = a^2 + 6a + \square$

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + 3)^2 = a^2 + 6a + \mathbf{9}$

Finalmente, el resultado es:

3. Completa cada recuadro.

a. $(\mathbf{a} + 3)^2 = a^2 + 6a + \mathbf{9}$

Puedes comprobar este resultado en el solucionario de tu texto de estudio, **página 290**.



Actividad 3:

Ahora puedes resolver el **ejercicio b** del **ítem 3**

Para resolver el **ítem 4** de la **página 76**, lee con atención la información que ahí aparece.

4. Analiza la siguiente información y luego utilízala en cada trinomio.

La **completación de cuadrado** es una técnica que permite representar un trinomio como una expresión que contenga un cuadrado de binomio. En el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, realizas lo siguiente:

$$x^2 - bx + c \rightarrow x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2 - bx + c \rightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$



Consideras el valor de b y lo divides por 2, y esta expresión la elevas al cuadrado, luego la sumas y restas a la expresión original.

Por ejemplo:

$$x^2 - 6x + 15 \rightarrow x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 15$$



$$\begin{array}{c} \text{Cuadrado de binomio} \\ \boxed{x^2 - 6x + 3^2} - 3^2 + 15 \rightarrow \boxed{(x - 3)^2} + 6 \end{array}$$

Por lo tanto, $x^2 - 6x + 15 = (x - 3)^2 + 6$.

a. $x^2 - 10x + 32$

b. $y^2 - 14y - 1$

c. $z^2 + 2z + 2$

d. $w^2 - w - 5$

Realizaremos como ejemplo el **ejercicio c** del **ítem 4**

$$z^2 + 2z + 2$$

1º Identifiquemos el coeficiente numérico del segundo término del trinomio y lo dividimos en dos:

$$z^2 + \color{red}{2}z + 2 \rightarrow 2 \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

2º Elevemos al cuadrado el término obtenido y luego sumémoslo y restémoslo a la vez al trinomio original:

$$z^2 + 2z + 1^2 - 1^2 + 2$$

Debes agregar este paso al **lado del segundo término**, ya que así será más simple visualizar el cuadrado de binomio que estamos buscando

3º Ahora podemos identificar el trinomio que asociaremos al cuadrado de binomio:

$$\boxed{z^2 + 2z + 1^2} - 1^2 + 2 \longrightarrow \boxed{(z + 1)^2} - 1^2 + 2 \longrightarrow (z + 1)^2 - 1 + 2$$

4º Se debe sumar los términos finales de la completación de cuadrado:

$$(z + 1)^2 - 1 + 2 = (z + 1)^2 + 1$$

5º Finalmente, obtenemos la completación de cuadrado de un trinomio dado:

$$z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1$$

Puedes comprobar este resultado en el **solucionario de tu texto de estudio**, página 290.

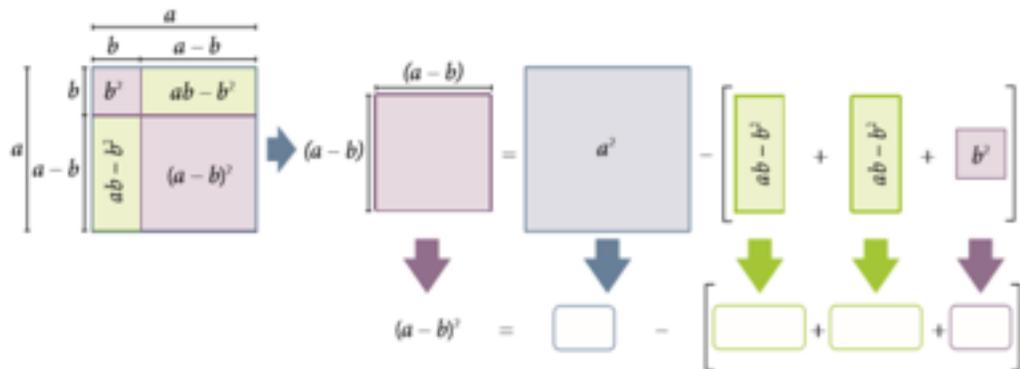


Actividad 4:

Resuelve los **ejercicios a, b y d** de el **ítem 4** de la **página 76** de tu texto de estudio. Observa la representación que se encuentra en la **página 77** en el

5. Completa la siguiente representación geométrica.

El área del cuadrado de lado $(a - b)$ se obtiene a partir de lo siguiente:



Por lo tanto, el área del cuadrado de lado $(a - b)$ es:

Al analizar el diagrama se observa que un cuadrado de lado $(a - b)$ se subdividió en cuadrados y rectángulos más pequeños indicando en cada uno de ellos su área.



Actividad 5:

Completa los recuadros que aparecen en el diagrama con el área de cada una de las figuras y luego reduce los términos semejantes siguiendo las indicaciones que ahí aparecen.



Actividad 6:

Para resolver el ítem 7 y 8 de la página 77 recuerda los pasos aprendidos en las clases anteriores relacionados a la resolución de problemas.

Recuerda siempre ir verificando tus respuestas en el **solucionario de tu texto de estudio**, página 290.

Cierre



Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1

¿Cuál de las siguientes trinomios es igual a $(a - 2b)^2$?

- A. $a^2 - 2ab + 4b^2$
- B. $a^2 + 2ab + 4b^2$
- C. $a^2 - 4ab + 4b^2$
- D. $a^2 + 4ab + 4b^2$

2

¿Cuál de los siguientes cuadrados de binomio se asocia al trinomio $x^2 - 6x + 9$?

- A. $(x + 3)^2$
- B. $(x - 3)^2$
- C. $(3 - x)^2$
- D. $(3 + x)^2$

3

¿Cuál es el valor que debe ir en el recuadro de la expresión $a^2 + \square ab + 16b^2$, considerando que el trinomio se asocia a un cuadrado de binomio?

- A. 2
- B. 4
- C. 8
- D. 16

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _____ fue: _____.

1º
medio

Texto escolar

Matemática

Unidad

1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Cuadrado y cubo de un binomio

Objetivos

- Calcular el cuadrado de un binomio.
- Calcular el cubo de un binomio.

El área de un cuadrado de lado igual a x se calcula utilizando la expresión x^2 . En la figura se muestra un cuadrado cuyo lado mide $(a + b)$.

- Anota las medidas que faltan en el cuadrado $ABCD$ y luego completa el cálculo del área.

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$
 $= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$ (Propiedad distributiva.)
 $= a^2 + \square + ba + \square$ (Multiplicas.)
 $= a^2 + ab + ab + b^2$ (Propiedad conmutativa.)
 $= a^2 + 2ab + b^2$ (Área cuadrado $ABCD$.)

Habilidad

Al fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico estás usando la habilidad de **argumentar** y **comunicar**.

- Lo que resolviste anteriormente corresponde al cuadrado de un binomio y en este caso coincide con el área del cuadrado $ABCD$.

Conceptos

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

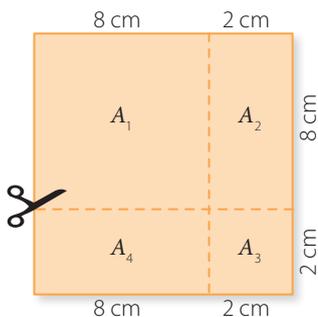
Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

PASO A PASO

- 1 $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2$ → Aplicas la definición.
 - Cuadrado del primer término.
 - Doble del producto de los términos.
 - Cuadrado del segundo término.
- 2 $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2$ → Aplicas propiedades de las potencias.
- 3 $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ → Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.



- Utiliza un trozo de papel cuadrado de 10 cm, recórtalo como se muestra en la imagen. Calcula el área del cuadrado y cada una de las áreas que lo componen, ¿qué relación tiene lo anterior con los productos notables? Justifica tu afirmación.

Ejemplo 2

En la siguiente igualdad, ¿qué número debe ir en cada recuadro?

$$(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{} + \boxed{}$$

1 En el lado izquierdo de la igualdad el primer término es $5x$ y el segundo término, $2y$.

PASO A PASO

2 El número que debe ir en el primer recuadro será: "el doble del producto del primer por el segundo término", es decir, $2 \cdot 5x \cdot 2y = 20xy$. El número que debe ir en el segundo recuadro será: "el cuadrado del segundo término", es decir, $(2y)^2 = 4y^2$.

3 Finalmente, se obtiene que: $(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{20xy} + \boxed{4y^2}$

Conceptos

El **cubo de un binomio** corresponde a la multiplicación de un binomio por sí mismo tres veces, y se representa como: $(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3$. Se tienen los siguientes casos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo 3

¿Qué expresión resulta al resolver $(4x - 5)^3$?

1 $(4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3 \dots \rightarrow$ Utilizas el desarrollo del cubo de un binomio.

2 $64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 25 - 125 \dots \rightarrow$ Calculas el valor de las potencias.

PASO A PASO

3 $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125 \dots \rightarrow$ Calculas los productos.

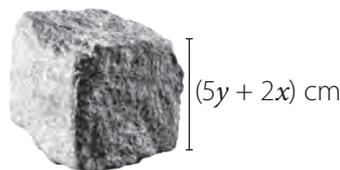
Respuesta: La expresión que resulta es: $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$.

Ejemplo 4

Si la roca tiene forma de cubo, ¿cuál es su volumen?

1 La arista mide $(5y + 2x)$ cm.

2 El volumen se calcula con la expresión $(5y + 2x)^3$ cm³.



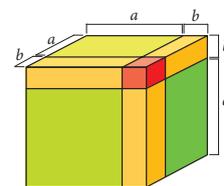
PASO A PASO

3 $(5y + 2x)^3$ cm³ = $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm³.

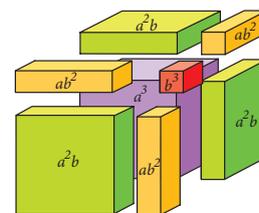
Respuesta: El volumen es $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm³.

Atención

Puedes representar gráficamente un producto notable a partir de un cubo de arista $(a + b)$.



Al descomponerlo en cubos y prismas más pequeños, se obtienen los siguientes cuerpos con sus respectivos volúmenes:



Al sumar los volúmenes de cada cuerpo se obtiene el volumen del cubo original.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

⦿ ¿Cómo calcularías el resultado de $(a + b)^4$? Explica.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa cada tabla y luego responde.

a.

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2$	$a^2 - b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
3	2						
1	0						

⊙ ¿La expresión $(a + b)^2$ es siempre igual a la expresión $a^2 + b^2$, y la expresión $(a - b)^2$ es siempre igual a la expresión $a^2 - b^2$? Explica.

b.

x	y	$(x + y)^3$	$x^3 + y^3$	$(x - y)^3$	$x^3 - y^3$
2	-4				
1	0				

⊙ ¿La expresión $(x + y)^3$ es siempre igual a la expresión $x^3 + y^3$, y la expresión $(x - y)^3$ es siempre igual a la expresión $x^3 - y^3$? Explica.

2. Calcula el cuadrado o cubo de un binomio.

a. $(4 + 1)^2$ b. $(2 - y)^2$ c. $(3x + 2y)^3$ d. $(4z^2 - 5w)^3$

3. Completa cada recuadro.

a. $(\square + 3)^2 = a^2 + 6a + \square$ c. $(2a + \square)^3 = 8a^3 + \square + 54ab^2 + 27b^3$

b. $(3a^2 - 2b)^2 = \square - 12a^2b + \square$ d. $(5x^2 - 2y^3)^3 = 125x^6 - \square + 60x^2y^6 + \square$

4. Analiza la siguiente información y luego utilízala en cada trinomio.

La **completación de cuadrado** es una técnica que permite representar un trinomio como una expresión que contenga un cuadrado de binomio. En el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, realizas lo siguiente:

$$x^2 - bx + c \rightarrow x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2 - bx + c \rightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$



Consideras el valor de b y lo divides por 2, y esta expresión la elevas al cuadrado, luego la sumas y restas a la expresión original.

Por ejemplo:

$$x^2 - 6x + 15 \rightarrow x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 15$$



Cuadrado de binomio

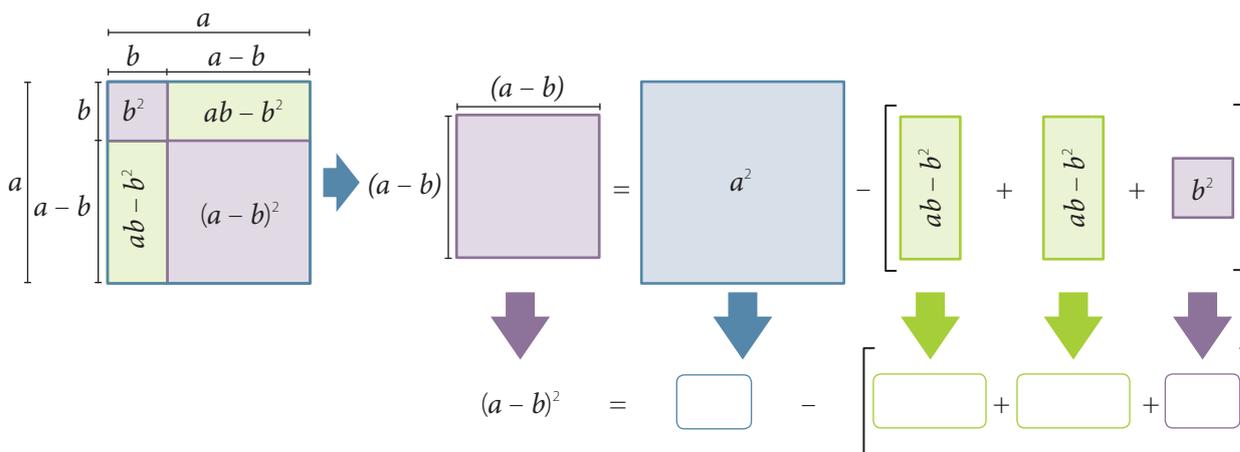
$$\boxed{x^2 - 6x + 3^2} - 3^2 + 15 \rightarrow \boxed{(x - 3)^2} + 6$$

Por lo tanto, $x^2 - 6x + 15 = (x - 3)^2 + 6$.

a. $x^2 - 10x + 32$ b. $y^2 - 14y - 1$ c. $z^2 + 2z + 2$ d. $w^2 - w - 5$

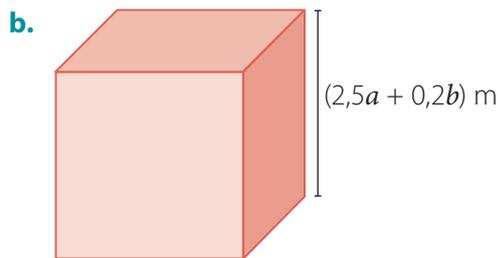
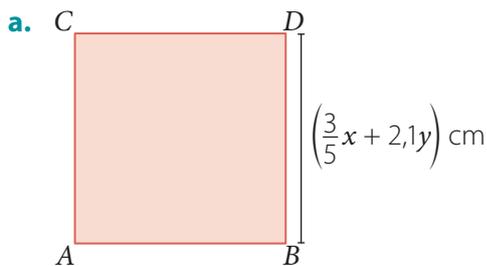
5. Completa la siguiente representación geométrica.

El área del cuadrado de lado $(a - b)$ se obtiene a partir de lo siguiente:



Por lo tanto, el área del cuadrado de lado $(a - b)$ es:

6. **Geometría** Calcula el área del cuadrado y el volumen del cubo.



7. **Economía** El capital C a un porcentaje x en 2 años se convierte en $C(1 + x)^2$.

- a. Desarrolla el binomio $(1 + x)^2$ y calcula el producto de $C(1 + x)^2$.
- b. Si el capital es de \$10 000 000 y el porcentaje es 21 % anual, ¿cuánto capital se obtiene luego de 2 años?

8. Resuelve los siguientes problemas.

- a. Calcula el valor de $a + b$, teniendo en cuenta que $a^2 + b^2 = 58$ y $a \cdot b = 21$.
- b. Julio afirma que el resultado de $(a + b + c)^2$ es igual a $a^2 + b^2 + c^2$, mientras que Josefa afirma que $(a + b + c)^2$ es $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$. ¿Quién está en lo correcto? Explica.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué actividades consideraste un desafío de resolver? Explica.

- Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrado y cubo de un binomio.
