Unidad 3: Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades las distribuciones binomial o normal

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden los beneficios de trabajar con una distribución normal para encontrar rápidamente la probabilidad de algún suceso. Comienzan con experimentos aleatorios binomiales, encuentran la probabilidad de un suceso discreto y continúan con sucesos continuos y la probabilidad normal. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se modela las situaciones de incerteza? ¿Cómo permiten tomar decisiones las distribuciones de probabilidades de sucesos?

Objetivos de Aprendizaje

OA 3.

Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes usen la distribución de probabilidad binomial en experimentos sencillos. Lo complementan comparando con otros modelos de probabilidad –por ejemplo, el de Laplace– y diferencian claramente cuándo aplicar uno u otro. Progresan desde comprender experimentos aleatorios del tipo Bernoulli, con probabilidad de éxito y fracaso, hasta llegar al modelo de probabilidades binomial, donde interesa determinar la probabilidad de obtener exactamente un resultado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

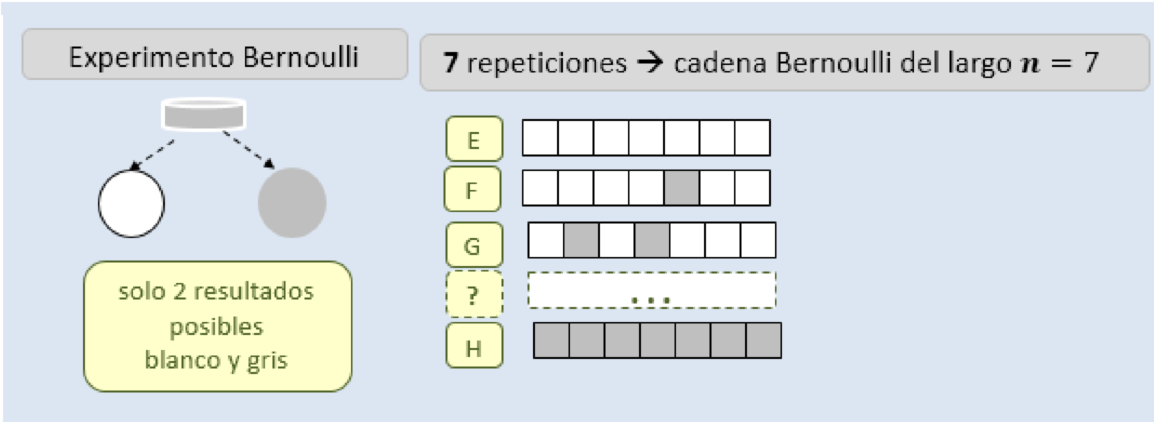
DESARROLLO

DESARROLLAR EL MODELO DE PROBABILIDADES BINOMIAL A PARTIR DE EXPERIMENTOS DEL TIPO “BERNOULLI”

Paso 1. Determinar probabilidades de repeticiones de experimentos aleatorios del tipo “Bernoulli”.

La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio, en el cual se lanza una ficha de lados blanco y gris. Se supone que la ficha es “justa”; es decir, la probabilidad del evento “blanco **b**” es igual al evento “gris **g**”.
Se realiza $n = 7$ repeticiones del lanzamiento y sus eventos se registran en tablas de una fila con 7 columnas, cuyas celdas se marcan en blanco o en gris.

Los eventos también se representan en una fila con 7 columnas ingresando las letras "**b**" y "**g**" o coloreando en blanco y gris según corresponda

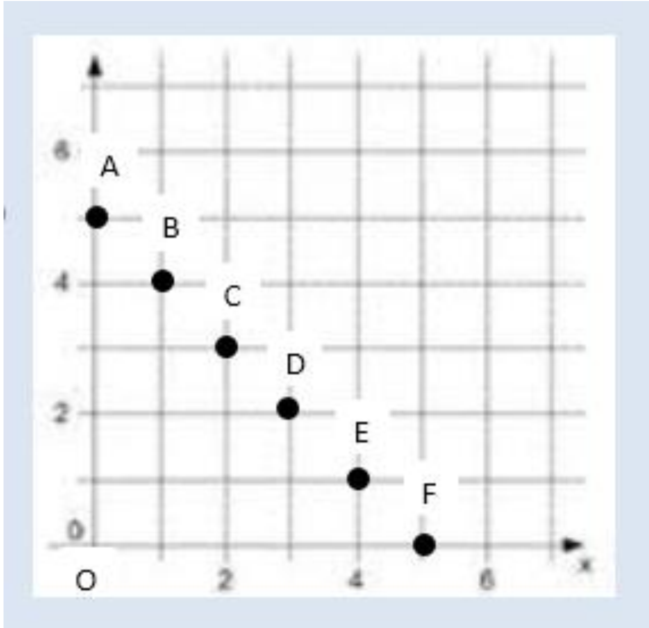


a. Completa las siguientes 7 –tuplas ordenadas que representan los eventos "E", "F", "G" y "H".
   $E = (\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad)$
   $F = (\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad)$
   $G = (\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad)$
   $H = (\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad)$

b. Determina las probabilidades $P(E)$, $P(F)$, $P(G)$ y $P(H)$ de los eventos "E", "F", "G" y "H".

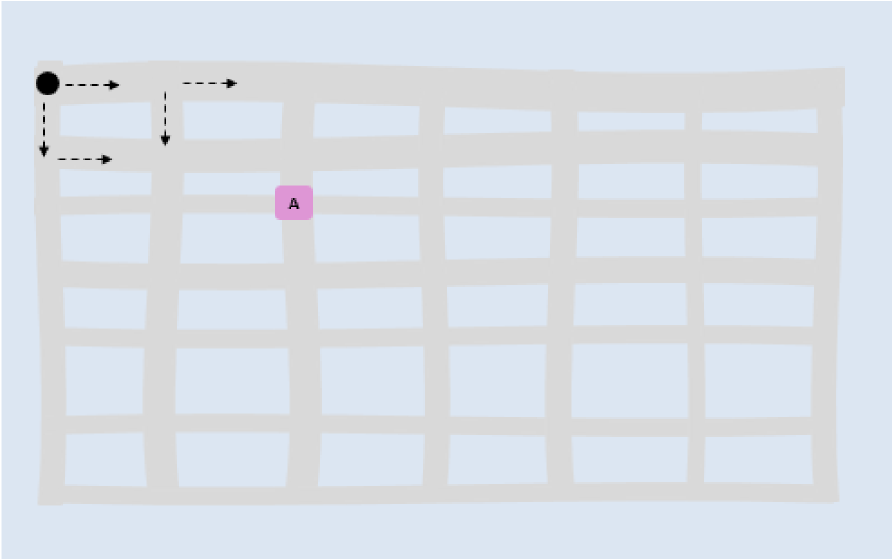
c. ¿Cuál es la probabilidad de cualquier evento compuesto de 7 lanzamientos? Argumenta la respuesta.

Paso 2. La siguiente imagen muestra un sistema de coordenadas con los puntos A, B, C, D, E, F. Partiendo del origen O, es posible moverse en las líneas de la "reja" en 5 pasos de una unidad para llegar a uno de los puntos mencionados. Se define una variable aleatoria X que representa el número de los pasos hacia la derecha.



a. Determina los valores $X = k$ para llegar a los puntos A, B, C, D, E, F.
b. Marca con diferentes colores todos los "caminos" posibles para llegar desde O a los puntos A, B, C, D, E, F.
c. Si la probabilidad de dar un paso hacia la derecha es igual que dar un paso hacia arriba, ¿cuál es la probabilidad de llegar a los puntos mencionados?
d. ¿Qué coincidencia existe con el experimento anterior? Argumenta tu respuesta.

Paso 3. En un sistema subterráneo de caminos, un grupo de rescate se encuentra en un cruce, marcado con el punto negro. El grupo intenta buscar a una persona que pasó por ese cruce y ha avanzado por cuatro cruces más en dirección al punto A.



a. ¿Cuántos caminos posibles hay para encontrar a esa persona? Utiliza la siguiente tabla para determinar sistemáticamente esta cantidad de caminos. En cada columna, marca con un punto rojo una decisión de avanzar hacia la izquierda y con un punto verde la decisión de avanzar hacia la derecha, según la referencia del grupo de búsqueda hacia el objetivo A. Cada columna representa un camino posible. Por ejemplo: una alternativa podría ser: izquierda, derecha, izquierda, derecha, lo que en la tabla se traduce en:

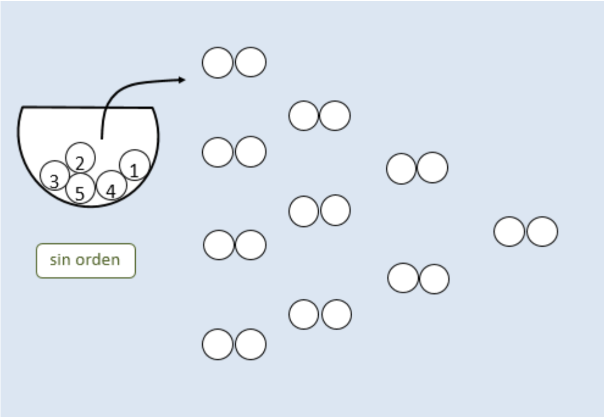
🔴																			
🟢																			
🔴																			
🟢																			

b. Completa la tabla con otros caminos posibles. Nota: La tabla tiene más columnas o caminos de los que se necesita.

c. Expresa el número de caminos posibles mediante una potencia, utilizando la información del enunciado.

d. Describe un experimento aleatorio que tenga la misma cantidad de eventos.

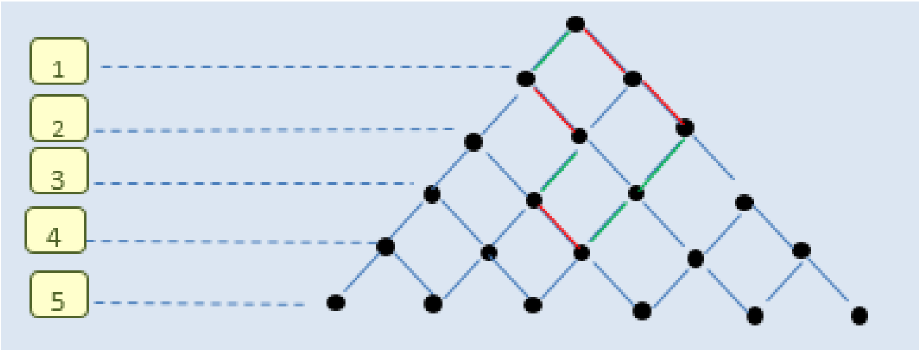
Paso 4. La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio de un "Mini-Loto", en el cual se extrae al azar dos bolitas de la siguiente manera: se saca una bolita, se registra el número y la bolita no se devuelve a la urna (sin reposición). Después se saca la segunda bolita y se registra el número. Se forman pares ganadores, sin importar el orden; esto significa, por ejemplo, que el evento $(3, 4)$ es el mismo evento que $(4, 3)$.



a. Organiza sistemáticamente los pares de bolitas y completa el esquema anterior, de modo que en todos los pares esté el número "1" en la primera columna.
b. ¿Cuántos pares son?
c. ¿Cuántos pares resultarían, si se respetara el orden?

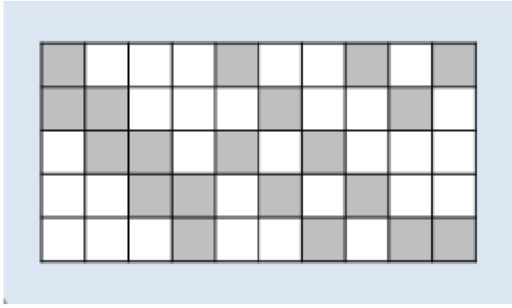
Paso 5. Imagina que, en un árbol de posibilidades de 5 niveles, se decide ir 2 veces a la derecha.

a. Marca el punto en el quinto nivel al cual se llega y determina la cantidad de caminos posibles siguiendo la regla de dos veces a la derecha.

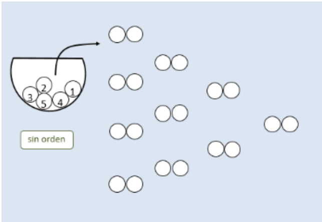


b. Siguiendo el recuadro anterior, completa el árbol de posibilidades. ¿Cuántos caminos hay para llegar al quinto nivel?

c. En la siguiente imagen, se muestra una representación en blanco y gris que indica la elección de dos cuadrados de una columna con 5. Numera los casilleros de 1 a 5 en cada columna y selecciona los números marcados en gris.



d. Compara la representación cuadricular con el ejercicio de la extracción de bolitas sin reposición. desde una urna de 5 bolitas y sin importar el orden, ¿es lo mismo? ¿por qué?



e. Si comparas la representación rectangular y el experimento de extraer dos bolitas sin reposición con el número de posibles caminos en el diagrama de árbol y la regla de ir 2 veces a la derecha ¿qué observas? ¿con que tipo de asociación entre las imágenes lo podrías explicar? (Ayuda: para llegar al punto C en el plano cartesiano se cumple la misma regla que en el ejercicio del diagrama de árbol, dos veces a la derecha).

Paso 6. Desarrollar algebraicamente los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ en el ejemplo, incluyendo todas las posibilidades de elegir 2 de 5 , $k = 2$ y $n = 5$ elementos sin reposición y sin considerar el orden. Esto implica ir 2 pasos, de un total de 5, en una de las direcciones posibles. Completa el procedimiento simbólico que se presenta en el siguiente recuadro.

cantidad de posibilidades en extraer $k = 2$ del total de $n = 5$

sin reposición

$S = 5 \cdot 4$

con orden

sin reposición

$Z = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} =$

sin orden: dividir por permutaciones de “k”

$Z = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} =$

$\dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot} =$

$\dfrac{*\,!}{*\,! \cdot *\,!} =$

$\dfrac{*\,!}{*\,! \cdot (* \;\; - * \;\;)!}$

aumentar por “3 · 2 · 1”

representar por facultades

representar por facultades de **n** y **k**

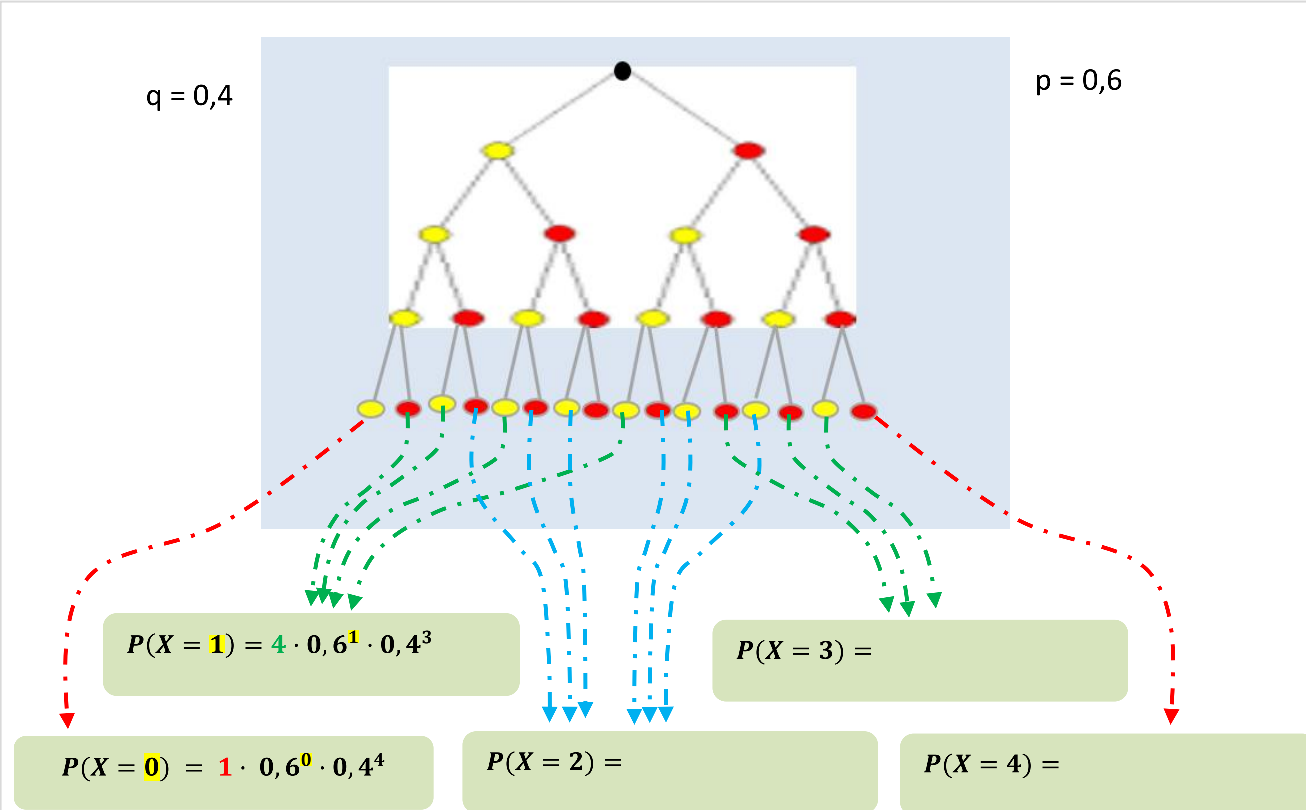
En general

$\binom{n}{k} =$

Paso 7. Desarrollar la expresión para la probabilidad P de tener k éxitos en n repeticiones de un experimento aleatorio del tipo Bernoulli. Esto se conoce como el Modelo de Probabilidades Binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

La siguiente imagen muestra un árbol que representa una situación con $n = 4$ decisiones de tomar el camino hacia la derecha (amarillo) o hacia la izquierda (rojo). La probabilidad de tomar el camino hacia la derecha es de $0{,}4$. Una variable aleatoria X representa las decisiones de tomar el camino hacia izquierda.



a. Mirando el esquema y el sistema de los caminos, completa los recuadros de la misma manera que para $P(X = 0)$ y $P(X = 1)$, pero ahora para calcular las probabilidades de $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ y $P(X = 4)$.

b. Comprueba los cálculos con el modelo de probabilidades binomial o distribución binomial para $n = 4\ y\ p = 0{,}6$.

c. La siguiente imagen muestra el modelo de probabilidades binomial. Los recuadros en distintos colores representan el significado de cada parte del modelo. Une los recuadros vacíos en color con el enunciado que está en los recuadros punteados.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Cantidad de caminos en el árbol de probabilidades

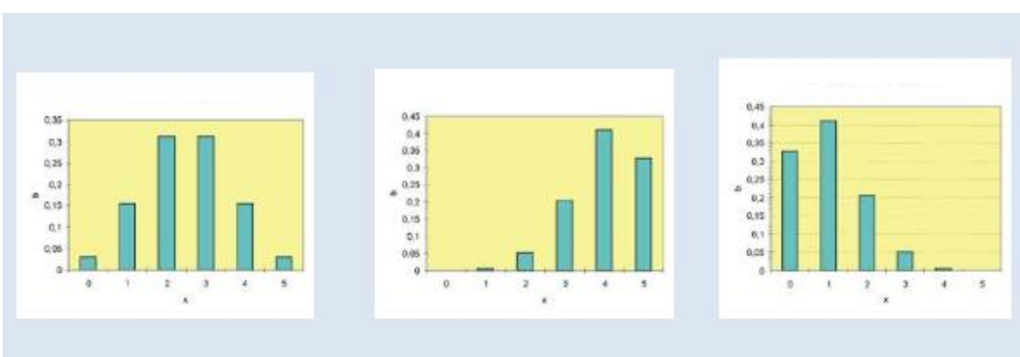
Probabilidad que corresponde a un camino de **k** éxitos

Probabilidad de **k** éxitos entre **n** total

Número de los éxitos

RESOLVER PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DISTRIBUCIONES BINOMIALES

1. La siguiente imagen muestra los histogramas de tres distribuciones binomiales. La variable aleatoria X representa el número k de éxitos en un total de $n = 5$ ensayos. La probabilidad p de éxito puede tener el valor de $p = 0{,}8$, $p = 0{,}2$ y $p = 0{,}5$. Completa con la probabilidad de p correspondiente bajo los histogramas y argumenta tu decisión.



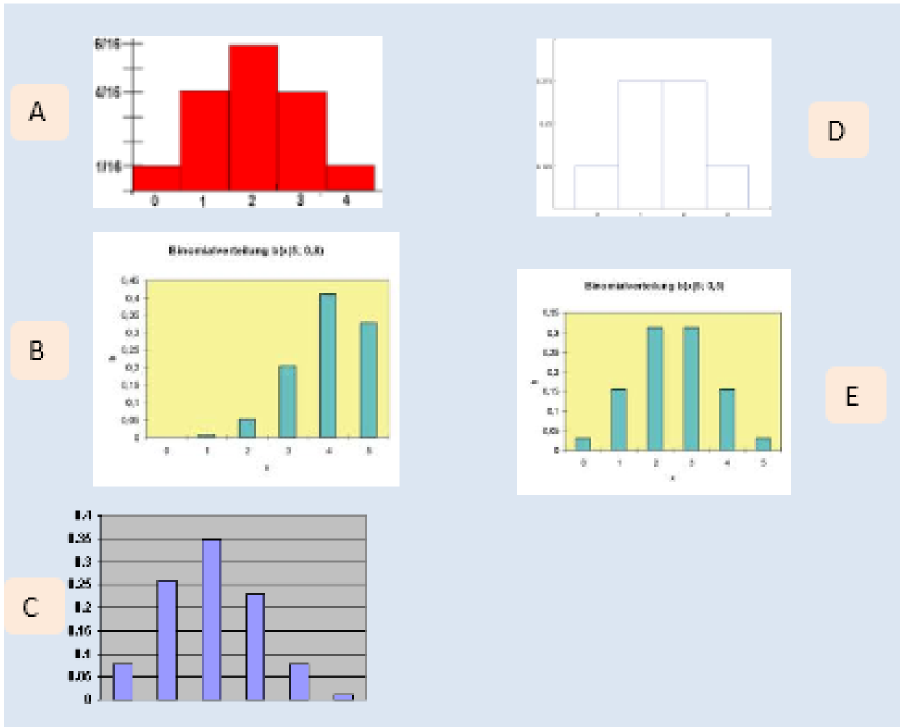
$p =$

$p =$

$p =$

a. Si se hubiera obtenido los histogramas de las mismas características mediante una "tabla de Galton", ¿cuál no mostraría inclinación alguna en sus resultados?, ¿cuál estaría más inclinada a la izquierda y cuál más a la derecha? Argumenta tu respuesta.

b. ¿Cuál de los cinco histogramas siguientes corresponde a una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}5$? Argumenta tu decisión.



2. ¿Cuáles de las siguientes situaciones se puede modelar con una distribución binomial? Argumenta tus respuestas.

a. Un tirador al arco acierta en el blanco con una probabilidad de 75%. En un certamen, tiene que realizar 6 lanzamientos. Si no alcanza el blanco, la probabilidad de acertar el próximo tiro desciende a 10%.

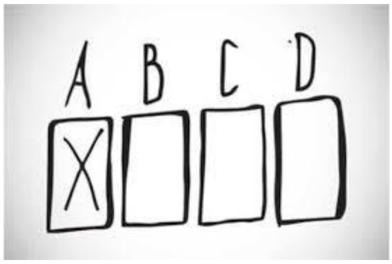
b. En los primeros meses después de entrar en vigencia la ley que obliga a llevar un chaleco de seguridad, se estima que el 60% de los autos tienen un chaleco a bordo. En la carretera se realiza un control de tránsito y se controla al azar a 50 autos.

c. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. Se quiere saber qué probabilidad hay de encontrar a un portador de daltonismo en una familia compuesta de 7 personas, mujeres y hombres.

d. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. 10 hombres acuden a la consulta de un oftalmólogo y se quiere saber la probabilidad de encontrar a un portador de daltonismo entre ellos.

e. En la final de lanzamiento de bala, cada deportista tiene 6 lanzamientos. La probabilidad de que un deportista tenga un lanzamiento válido es de 75%. Se quiere determinar la probabilidad de tener, por lo menos, 4 lanzamientos válidos.

3. Una prueba del tipo selección múltiple tiene 10 preguntas de 4 opciones, de las cuales solo una es la correcta. En las preguntas, las opciones correctas y falsas están distribuidas al azar. Se define una variable aleatoria X que corresponde al número de preguntas correctamente respondidas.



   a. ¿Por qué la situación es modelable por una distribución binomial? Argumenta.
   b. Identifica los parámetros de n, k y p. Elabora el modelo binomial que determina la probabilidad $P(X = k)$.
   c. Si se contesta todas las preguntas "al azar", ¿cuál es la probabilidad de responder correctamente la mitad de ellas? Argumenta.
   d. Se aprueba si se responde correctamente un mínimo de 6 preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?
   e. No se puede repetir la prueba si se responde correctamente a menos de cuatro preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos sobre la probabilidad. Algunas de las preguntas o instrucciones pueden ser:
   - ¿Qué entiendes por probabilidad?
   - Describe los procedimientos o pasos para determinar la probabilidad teórica y compara con la denominada (en muchos casos) "probabilidad experimental".
   - ¿Qué significado tiene para ti la palabra "aleatorio"? ¿Hay diferencias entre aleatorio y azaroso?
   - Piensa en toda la ropa que tienes, clasifícala en poleras, pantalones, calcetines y zapatos. Determina cuántos días podrías venir al colegio vistiendo, al menos, una prenda diferente. ¿Qué pasos tendrías que seguir para averiguar la posibilidad de encontrar, en un periodo de tiempo determinado, a dos compañeros que vengan el mismo día con una polera azul?

2. En este nivel, los alumnos ya deben haber estudiado la distribución de probabilidad binomial. Sin embargo, en estas actividades se propone un nuevo enfoque, más centrado en la elección del mejor modelo de acuerdo con el tipo de experimento indicado; por ejemplo: por qué el modelo de Laplace no sirve en este caso y qué características de este tipo de problemas se puede modelar con la distribución binomial.

3. Las actividades propuestas permiten desarrollar paso a paso el procedimiento para obtener el modelo de probabilidades binomial. Se sugiere enfatizar cada concepto y diferenciar adecuadamente el significado de un experimento de tipo "Bernoulli" hasta llegar a la distribución de probabilidades propiamente binomial. En el experimento tipo Bernoulli se tiene que:

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x} \text{ con } x = 0, 1$$

   En cambio, para el modelo de probabilidades binomial se tiene:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

   e interesa saber la probabilidad de obtener exactamente *k* éxitos en *n* lanzamientos o intentos.

4. Se propone también que usen convenientemente algunas propiedades básicas de las probabilidades, como la propiedad del complemento. No la usarán solo como ejercitación, sino como una herramienta para realizar cálculos convenientes.

5. Como se presenta una situación que debe ser validada o refutada, se potencia la habilidad de argumentar. La idea es que valoren el uso de un modelo confiable –en este caso el binomial– para fundamentar una afirmación que hicieron sin contar con el modelo.

6. Dado que uno de los objetivos de la unidad 3 es OA 3 (Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal)**,** se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los estudiantes para que evalúen el proceso de modelar en general:

Criterios	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Interpretan la situación con términos algebraicos, números o letras.	Identifican todos los datos de la situación.	Identifican algunos datos de la situación.	Escriben números o letras.
	Describen las variables y la estructura de la situación, calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Escriben palabras que están en otro contexto.

Relacionan las variables, basándose en un modelo normal o binomial y en cálculos de probabilidades.	Determinan la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Determinan parcialmente la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Escriben alguna ecuación que responde a otro problema.
Calculan probabilidades, basándose en las condiciones del problema.	Calculan las probabilidades, utilizando correctamente las propiedades y atendiendo a las condiciones del problema.	Calculan probabilidades, utilizando las propiedades.	Realizan cálculos aritméticos o algebraicos.
Interpretan los resultados, volviendo a la situación inicial.	Interpretan los resultados relacionando con la situación inicial.	Escriben los resultados.	Escriben números asociados a un problema diferente.

7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican las principales características de los modelos Bernoulli y binomial de probabilidades.
   - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Distribución Bernoulli con ejemplos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=WBSOTPM4BeY
  https://www.youtube.com/watch?v=TX2ga6fZxxM
- Expresión matemática de la distribución binomial y aplicaciones sencillas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Distribucion_binomial.html

Actividad 2: Comprender el modelo normal de probabilidades

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen en los conceptos clave de la distribución normal y la manera de llegar a ellos, y que argumenten sobre cómo histogramas que reflejan distribuciones binomiales se "parecen" cada vez más a "distribuciones normales" al aumentar el número de repeticiones. Se pretende también que dialoguen acerca de la necesidad de incorporar la distribución normal estándar para calcular determinadas probabilidades en contexto. Del mismo modo, pueden reforzar la aproximación de una distribución binomial por una distribución normal en contextos determinados.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

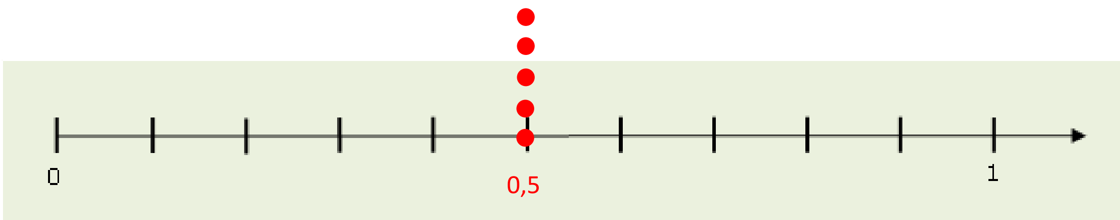
DESARROLLO

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

DESARROLLO Y SIGNIFICADO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Paso 1. El concepto de una variable aleatoria continua.
El recuadro siguiente muestra una recta numérica con subdivisión en décimas. Se marcó el número racional de $0{,}5$. Se sugiere realizar el siguiente experimento aleatorio, utilizando un generador digital de números al azar disponible en internet.

a. Primer experimento: Se elige números naturales de $1\ a\ 10$. Entre los números generados, se registra los números "5" –que se interpretan como "$0{,}5$"– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número "$0{,}5$". Después de $n = 100\ o\ 200$ números generados, se determina la frecuencia relativa de los “5”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.



b. Segundo experimento: Se elige números naturales de $1\ a\ 100$. Entre los números generados, se registra los números “50” –que se interpretan como “$0{,}50$”– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número “$0{,}50$”, que es la misma que la de “$0{,}5$”. La subdivisión de la recta numérica entre 0 y 1 se cambió en centésimas. Después de $n = 100\ o\ 200$ números generados, se determina la frecuencia relativa de los “50”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.

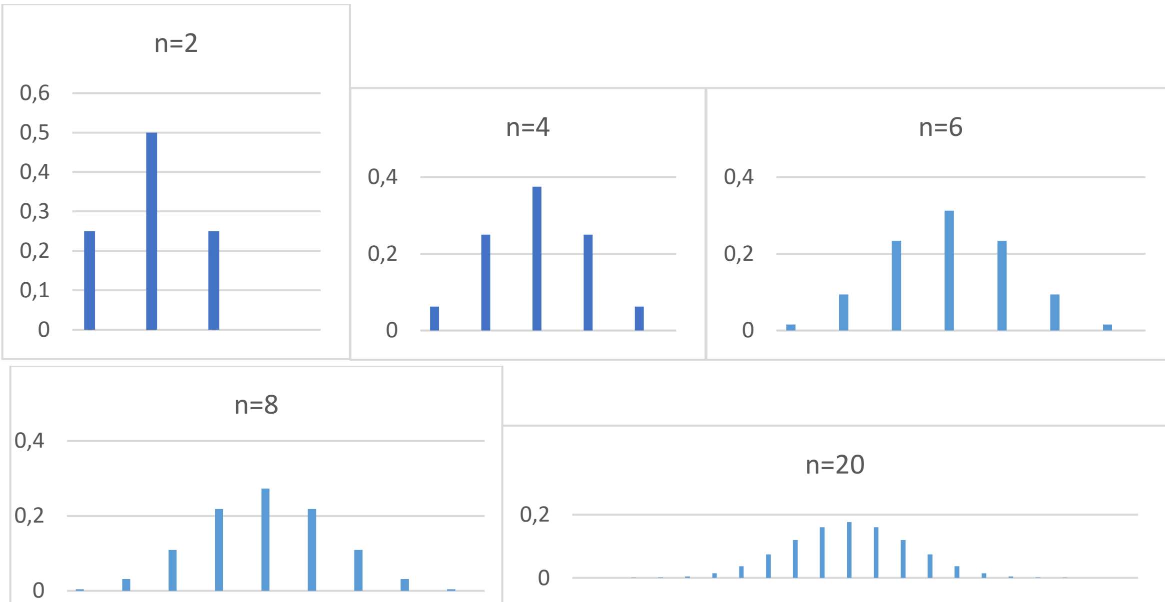
c. Se piensa en cambiar la graduación en $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10\ 000}, \frac{1}{100\ 000}, \frac{1}{1\ 000\ 000}, \frac{1}{10\ 000\ 000}, \frac{1}{100\ 000\ 000}, \frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}$, … siguiendo con cambiar la subdivisión según el mismo patrón. El generador de números al azar generaría números de 1 a 1 000 000 000, continuando con aumentar los números generados con el factor 10. ¿Cuál sería la tendencia de la probabilidad de obtener "$0{,}500$", "$0{,}5\ 000$", “$0{,}50\ 000$” , “$0{,}500\ 000$”, “$0{,}5\ 000\ 000$”, “$0{,}50\ 000\ 000$”, “$0{,}500\ 000\ 000$”etc.? Argumenten su respuesta.

d. Si se considera el conjunto de los números racionales $\boldsymbol{Q}$, ¿cuál será la probabilidad teórica de encontrar un granito de arroz de, por ejemplo, $28,\overline{3}mg$? Argumenten su respuesta.

e. Si se considera que el conjunto de los números racionales $\boldsymbol{Q}$ es subconjunto de los números reales $\boldsymbol{R}$, ¿cuál será la probabilidad de encontrar un granito de arroz con una masa de $27{,}01001000100001\ldots.mg$? Argumenten su respuesta.

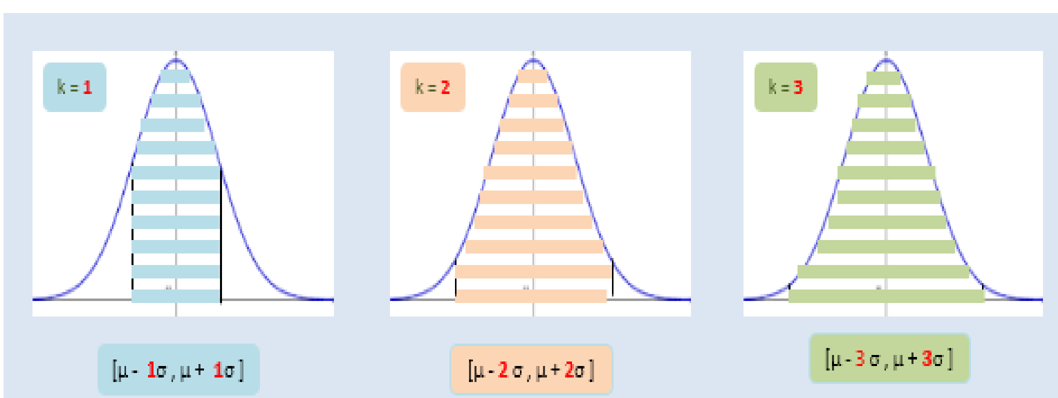
f. Considerando que las variables aleatorias continuas toman valores reales, ¿cuál es la probabilidad $P(r)$, si r es un número real? Argumenten su respuesta.

Paso 2. Se muestra los siguientes histogramas de distribuciones binomiales de la probabilidad de éxito de $p = 0{,}5$, incrementando cada vez el valor de "n".



a. Al aumentar el valor del número n, ¿qué cambio experimentan los histogramas en cuanto a la forma, la ubicación del valor esperado y la probabilidad que corresponde al valor esperado μ? Argumenten su respuesta.
b. Con herramientas tecnológicas digitales como Excel, GeoGebra u otros, elaboren los histogramas para $n = 40$ y $n = 60$. ¿A qué forma se acercan los histogramas?
c. ¿Qué transformación geométrica de los histogramas se debe realizar para que el valor esperado μ se cambie a la posición $X = 0$? Argumenten su respuesta.

Paso 3. Significado de la distribución normal.
La imagen siguiente muestra los gráficos de una distribución normal de $N(\mu, \sigma)$ con los intervalos $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ para $k = 1, 2{,}3$



a. La probabilidad de un intervalo simétrico al valor esperado μ de $P(|X-\mu| \leq c)$ se estandariza mediante la función Φ en $\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi(\frac{c}{\sigma}) - 1.$
Con $c = k\sigma$ se obtiene $2 \cdot \Phi(k) - 1$. Determinen las probabilidades que corresponden a los intervalos [μ - 1σ, μ +1σ], [μ - 2σ, μ +2σ] y [μ - 3σ, μ +3σ]

b. ¿Por qué estas probabilidades son válidas para todas las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.

c. ¿Qué ventaja tienen las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.

Paso 4. Aproximación de una distribución binomial por la distribución normal estandarizada.

Según el registro electoral de una región, la participación en las últimas elecciones era de aproximadamente 80%.
Para una encuesta telefónica, se eligió al azar una muestra de 400 personas.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, 3° y 4° medio.

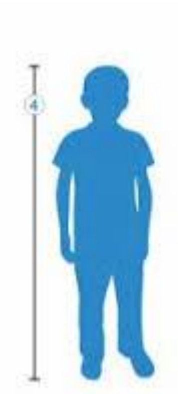
a. Determinen los parámetros de μ y σ de la distribución binomial y transfórmenla en la distribución normal estandarizada correspondiente.

b. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra más de 88 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.

c. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra, como máximo 70 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.

d. ¿Es posible de determinar la probabilidad de tener exactamente 88 personas en la muestra que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.

Paso 5. Aplicación de la distribución normal



A. Según el estudio antropométrico en párvulos atendidos por el Sistema Educativo Público Chileno para el diseño de mobiliario, publicado en la revista científica Scielo[11], la estatura media de niños en el grupo de 25 a 36 meses es de $\mu = 91{,}30cm$, con una desviación estándar de $\sigma = 4{,}27cm$.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio.

a. ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de $87cm$ como máximo? Argumenten su respuesta.

b. ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de $87cm$ como mínimo y $96cm$ como máximo? Argumenten su respuesta.

[11] https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-95022013000100032

B. La vida útil de los motores de un automóvil de cierta marca se distribuye según una distribución normal con el valor esperado de **μ** = 105 000 km y una desviación estándar de **σ** = 10 000 km.

a. ¿Qué porcentaje de los motores tiene una vida útil entre 90 000 km y 110 000 km? Argumenten su respuesta.
b. ¿Qué porcentaje de los motores supera la vida útil de 120 000 km? Argumenten su respuesta.
c. ¿Qué porcentaje de los motores se desvía del valor esperado en más de 12 000 km? Argumenten su respuesta.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Es posible que los estudiantes ya conozcan la distribución normal de probabilidades. En estas actividades se propone profundizar en los conceptos y cómo llegar a ellos. Por ejemplo, se parte de experimentos que utilizan variables aleatorias continuas, y se sigue con histogramas que representan experimentos binomiales, en los cuales, al aumentar el número de repeticiones “n”, la forma del histograma se parece cada vez más a una campana de Gauss.
2. Las actividades propuestas permiten que los jóvenes entiendan, paso a paso, el modelo normal de probabilidades. Además, discuten si es necesario incorporar la distribución normal estándar y cómo determinar las probabilidades que corresponden a los intervalos [μ - 1σ, μ +1σ], [μ - 2σ, μ +2σ] y [μ - 3σ, μ +3σ] e interpretar su significado.
3. Se sugiere proponer ejercicios en contexto en los que tengan que aproximar una distribución binomial a una distribución normal, para que vean la utilidad de esta transformación cuando el número “n” de observaciones es grande.
4. Para finalizar, se recomienda que resuelvan problemas en contexto en que deban aplicar la distribución normal con parámetros μ y σ dados. La idea es que resuelvan cálculos de probabilidad, utilizando la distribución normal estandarizada.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican las principales características de una distribución normal de probabilidades.
   - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Generadores de números aleatorios:
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.generarnumerosaleatorios.com/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.augeweb.com/azar/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://numero-aleatorio.com/generadores/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://pinetools.com/es/generador-numeros-aleatorios
- Cómo usar la fórmula de la distribución binomial en Excel
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=xVwetXD9cis

Actividad 3: Aplicar el modelo normal en el transporte de personas

PROPÓSITO

Los estudiantes usan la distribución normal para determinar probabilidades de interés, convirtiendo los valores de la variable aleatoria en su puntuación correspondiente. Se espera que sean empáticos con la situación planteada y que no respondan basándose en prejuicios sobre el peso de las personas y el transporte. La tarea se potencia con la interpretación de los resultados en el contexto y el uso de la planilla de cálculo como apoyo, aprovechando así las herramientas disponibles. También avanzan en el análisis de lo que ocurre con las medias de muestras tomadas al azar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

TRANSPORTE EN TELEFÉRICO

El Parque Metropolitano de Santiago es el cuarto parque urbano más grande del mundo, con más de 1785 hectáreas de extensión. Esto lo convierte en el pulmón verde más grande de Latinoamérica, que resalta gracias a los atractivos que posee. Es uno de los principales espacios de recreación, naturaleza, cultura y deporte de la capital.
Muchos visitantes usan el teleférico, pues permite ver Santiago desde las alturas y apreciar la belleza de la capital de nuestro país.

Imagen extraída de http://telefericosantiago.cl

Cada cabina tiene una capacidad de 480 kg o 6 personas. Por otro lado, varios estudios estadísticos (como la Encuesta Nacional de Salud) indican que la masa promedio de los hombres es de 77,3 kg y la de las mujeres, 67 kg. ¡Imagina qué ocurriría si las normas de seguridad del Parque Metropolitano no tuvieran en cuenta esta información!

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA a, c, 3° y 4° medio.

1. En grupos, respondan a las siguientes preguntas: ¿Qué información aporta saber que la masa de los hombres se distribuye normalmente? ¿Qué les permite saber y/o inferir? Argumenten su respuesta.
2. ¿Qué sucedería en la cabina si se suben 7 hombres cuya masa total aproximadamente es la media? Argumenten su respuesta.
3. ¿Qué sucedería en la cabina si se sube un hombre que tiene una masa mayor que la media; por ejemplo: 80 kg? Argumenten su respuesta.
4. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente a un hombre, su masa sea menor a 77,3 kg? Argumenten su respuesta.
   a. ¿Por qué es necesario convertir la masa en su puntuación z correspondiente para determinar la probabilidad buscada? Señalen los valores:

$$x = \_\_\_\_\_ ; \mu = \_\_\_\_\_ ; \sigma = \_\_\_\_\_$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} =$$

   b. ¿Cómo aporta y se usa la tabla de distribución normal estándar en este caso? Argumenten su respuesta.
   c. Usando el resultado anterior, determinen la probabilidad de que se elija al azar a un hombre con una masa mayor a la media. Expliquen los cálculos realizados.
5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente a un hombre, su masa sea mayor a 80 kg? Expliquen los cálculos realizados.
6. ¿Cómo podrían usar el resultado anterior para evaluar la seguridad del teleférico, según el criterio de capacidad y cantidad de personas? Argumenten su respuesta.

DETERMINAR PROBABILIDADES QUE IMPLIQUEN EL USO DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

1. ¿Qué sucedería si se suben 6 hombres a una cabina y todos ellos tienen una masa mayor que la media; por ejemplo: 80 kg? Expliquen la situación.
2. En Excel, generen muchas muestras aleatorias como la situación de estudio: masas de 6 hombres, distribuidos normalmente, con media 77,6 kg y desviación estándar 12,9.
   a. Usen la herramienta Análisis de datos en la pestaña Datos. En la ventana emergente, seleccionen Generación de números aleatorios, como en la figura 1.A.
   b. En la nueva ventana, ajusten los valores como en la figura 1.B. El número de variables corresponde a la cantidad de elementos de la muestra: seis masas.

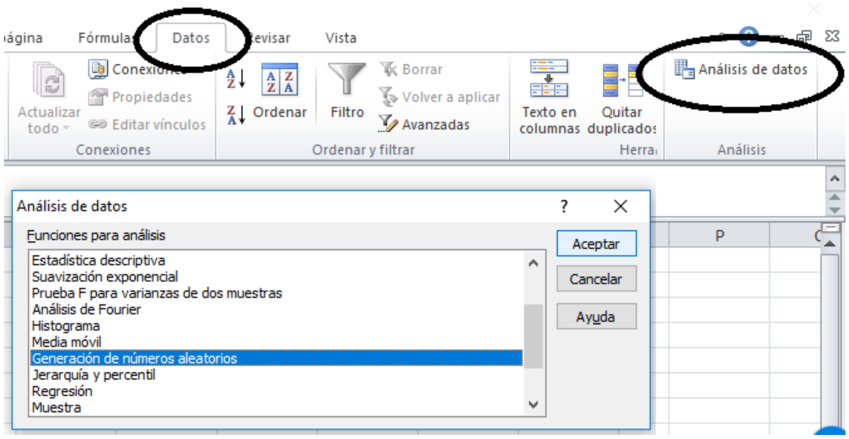


Figura 1.A.: Generación de datos aleatorios en Excel

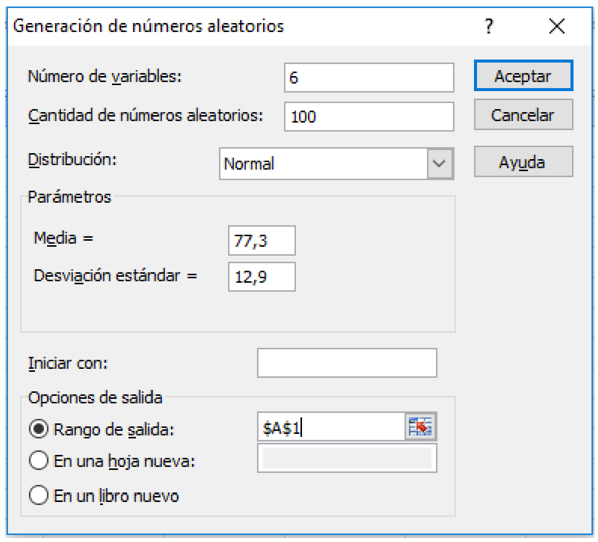


Figura 1.B: Distribución normal de datos aleatorios, con media y desviación conocida

3. ¿Qué necesitan saber para determinar la distribución de las medias de las masas de las muestras de 6 hombres?
   a. Determinen la media de cada muestra, usando la función Promedio en Excel.
   b. Con la herramienta Análisis de datos, seleccionen Histograma y grafiquen los valores de las medias obtenidas en 3.a.
   c. Describan la distribución de las medias de las muestras.

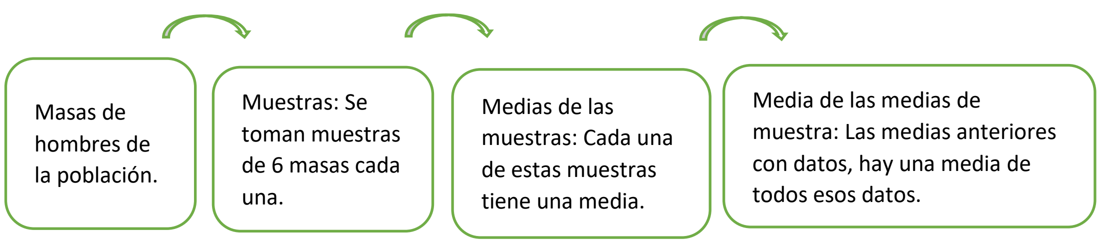
4. ¿En qué les aporta saber que las medias de las muestras se distribuyen normalmente para entender la situación de estudio? Argumenten su respuesta.

5. Determinen la media de las medias de las muestras, usando la herramienta Promedio.
   a. Comparen las medias de todas las masas y la media obtenida de las medias de las muestras.
   b. Determinen la desviación estándar de las medias de las muestras, usando la función Desvest en Excel.
   c. Comparen la desviación estándar de todos las masas y la desviación estándar obtenida de las medias de las muestras.

6. Prueben generando otras muestras que cumplan con lo enunciado en el punto 2 (media y desviación estándar dadas).
   a. Verifiquen si obtienen los mismos resultados que en los puntos 3 y 5.
   b. Generalicen a partir de sus resultados y los de sus compañeros.
7. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar 6 hombres al azar, estos tengan una masa total de más de 180 kg en promedio? Argumenten su respuesta.
   a. ¿Cómo pueden usar las conclusiones del teorema del límite central para determinar probabilidades? Argumenten su respuesta.
   b. ¿Qué parámetros se debe considerar para obtener la puntuación z de la media de las masas de una muestra? Argumenten su respuesta.
   c. Según la probabilidad encontrada, ¿qué les parece la seguridad del teleférico? Argumenten su respuesta.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se espera que los estudiantes determinen la probabilidad de solo un dato para que apliquen la estandarización y encuentren la puntuación z, usando la tabla de distribución normal estándar, que se puede obtener en el Anexo 3.
2. Se sugiere orientar la forma de determinar probabilidades en el caso de la distribución normal mediante la estandarización, pero si los alumnos no están listos para esta tarea, se recomienda remitirse a las actividades propuestas en el programa de asignatura de Matemática de plan común de 4° medio. En ellas se trabaja de forma exhaustiva en estos cálculos y su interpretación.
3. Se recomienda poner el foco en determinar medias de muestras y luego, en la media de dichas medias. Esto puede ser confuso si no se tiene claridad absoluta de lo que se está intentando hacer. El esquema muestra el orden en que se analiza los datos y qué media se menciona en cada oportunidad.



4. Se argumenta de forma muy simple el teorema del límite central, comprobando que se cumple para casos puntuales. Se eligió en esta oportunidad el caso en que los datos se encuentran distribuidos normalmente; el otro caso queda como un desafío para trabajar en las clases posteriores o se lo menciona, sin profundizar en él. Lo importante es que noten el aporte de contar con este teorema para entender cómo se comportan las medias de muestras, provengan o no de datos distribuidos normalmente.
5. Se propone que usen Excel, porque genera datos aleatorios rápidamente y sus funciones permiten determinar medias y desviaciones estándar.

6. La indicación de observar la gráfica de los valores determinados –sea con las masas o con la media de las muestras de las masas– es que visualicen la distribución de los datos. Ambos casos tienen distribución normal, pero en las medias de las muestras se nota menos exactitud; por ende, es aún más valioso haber usado valores "reales", pues así es como ocurre en realidad en las investigaciones ajenas al contexto escolar. Se requiere muchos más datos para obtener la campana de Gauss de forma exacta.
7. Para cerrar las actividades, tanto la individual como la colaborativa, se pregunta por la seguridad de las cabinas. Es importante que los argumentos se basen en las probabilidades determinadas, para que vean cómo el hecho de conocer las distribuciones de los datos y el cálculo de probabilidades, ayuda para tomar decisiones fundadas y no basadas solamente en la intuición.
8. Si bien en los casos "probabilidad de que un hombre tenga una masa de más de 80 kg" y "probabilidad de que 6 hombres tengan una masa total de más de 80 kg", las probabilidades no son suficientemente pequeñas como para desestimar un posible exceso de carga en las cabinas, no se debe olvidar que se ha analizado el caso más extremo, en el que solo suben hombres con masas superiores a la media, lo cual no debe ser la regla habitual. Muchas mujeres y niños son usuarios de este atractivo turístico. Por otro lado, las cabinas tienen una estructura muy segura y soportan más de lo expuesto al público.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Interpretan información estadística que involucra distribuciones de probabilidad binomial y el normal.
   - Modelan fenómenos o situaciones cotidianas, científicas y sociales mediante distribuciones binomiales y normales.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Generación de datos normales aleatorios en Excel, alternativa sin Análisis de datos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=d5KaLnAEJIg
- Tabla de probabilidades de distribución normal estándar.
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_tec_inf_gestion/estadistica/Documentacion/Tablas/tablas2caras.pdf

Actividad 4: Aproximar la distribución binomial por la distribución normal

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen aún más en el uso y el aporte de las distribuciones de probabilidad para modelar fenómenos cotidianos. También se pretende que usar la distribución normal como aproximación de la distribución binomial, parece un mejor camino según las condiciones del problema. En esta oportunidad, se propone que descubran por qué la técnica que ya han usado es válida y cómo, en términos generales, se debe ajustar un modelo matemático para adecuarse a los requerimientos de lo que pretende modelar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

APROXIMANDO UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL MEDIANTE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

¿Eres feliz? No siempre es fácil responder esta simple pregunta, pues cada persona tiene su propia idea de lo que es la felicidad; además, nuestras concepciones al respecto van cambiando constantemente, sobre todo a medida que pasan los años. En 2019, *Activa Research* y *WIN* publicó los resultados de una investigación que buscaba averiguar sobre la “Felicidad en Chile y el mundo”. Los resultados mostraron que, de los 30 890 entrevistados en el mundo, el 52% se considera feliz.

En Chile, los resultados indican que, de 1 032 encuestados, el 58% se considera feliz. ¿Te parece que estos datos se acercan a lo que ocurre en tu entorno? ¿Qué tan probable será que todos los que conoces estén en ese 58%, o que no estén en ese porcentaje? ¿Qué tan probable será que, si encuestas a algunas personas, ellas sean felices?

1. ¿Qué información te aporta saber que el 58% de los entrevistados es feliz?
   a. ¿Cómo puedes usar esta información para referirte a la población? ¿Qué restricciones debes tener en cuenta?
   b. ¿Cómo puedes usar esta información para determinar la probabilidad de que, al elegir a una persona al azar y preguntarle si es feliz, su respuesta sea afirmativa?

2. Se entrevista a 5 personas y se les pregunta si son felices o no. Se sabe de antemano que el 58% de las personas es feliz y asumimos que el 42% no lo es.
   a. ¿Cuál es la variable aleatoria en este caso? ¿Qué valores podría tomar?
   b. ¿Se puede modelar esta situación con una distribución binomial? ¿En qué aportaría conocer la distribución de los datos para entender el problema? Argumenta.

3. Determina las probabilidades de los valores de la variable aleatoria si se entrevista a 5 personas.
   a. Grafica los resultados en la Figura 1.

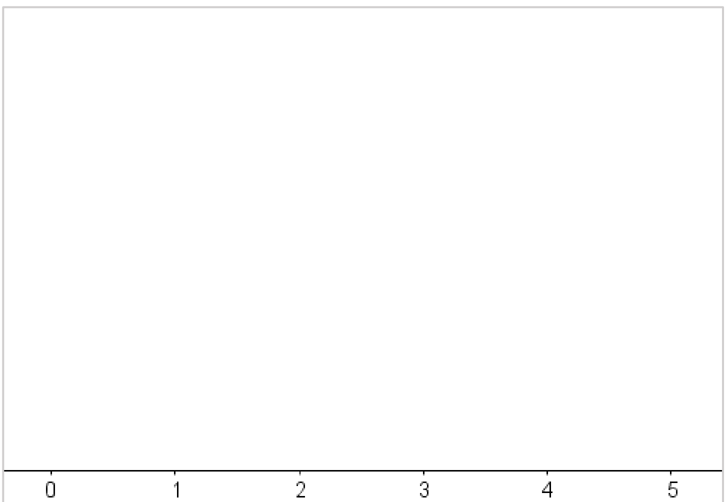


Fig. 1: Distribución de probabilidad de X cuando $n = 5$

   b. Describe la distribución de probabilidad de los datos.
   c. Describe tu apreciación sobre lo laborioso que es determinar probabilidades usando la forma algebraica de la distribución binomial. Proyéctalo al trabajo que implica determinar probabilidades cuando la variable aleatoria sea muy grande.

4. Usando GeoGebra, determina las distribuciones de probabilidad de la variable aleatoria cuando $n = 5, n = 10, n = 50, n = 250, n = 500, n = 1000$.
   a. Puedes configurar las opciones en GeoGebra como muestra la figura 2.

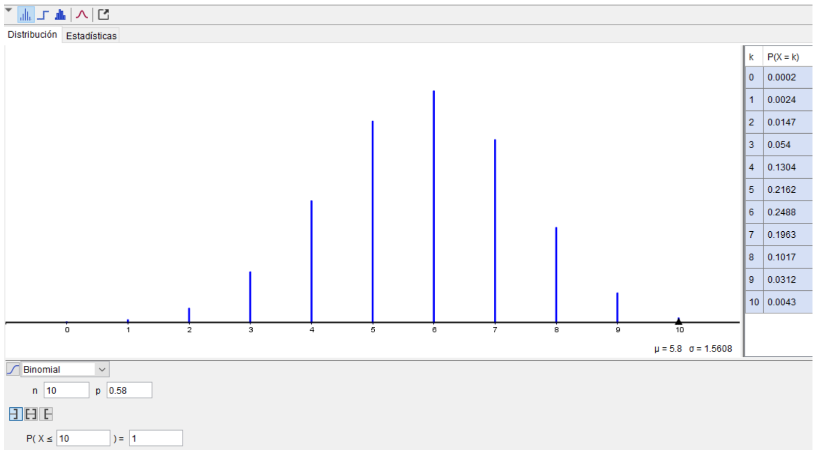


Fig. 2: Configuración en GeoGebra para determinar la distribución de probabilidad binomial

   b. Selecciona en GeoGebra la opción “Superposición de curva normal”.
   c. Bosqueja las gráficas en la figura 3 con diferentes n, según corresponda.

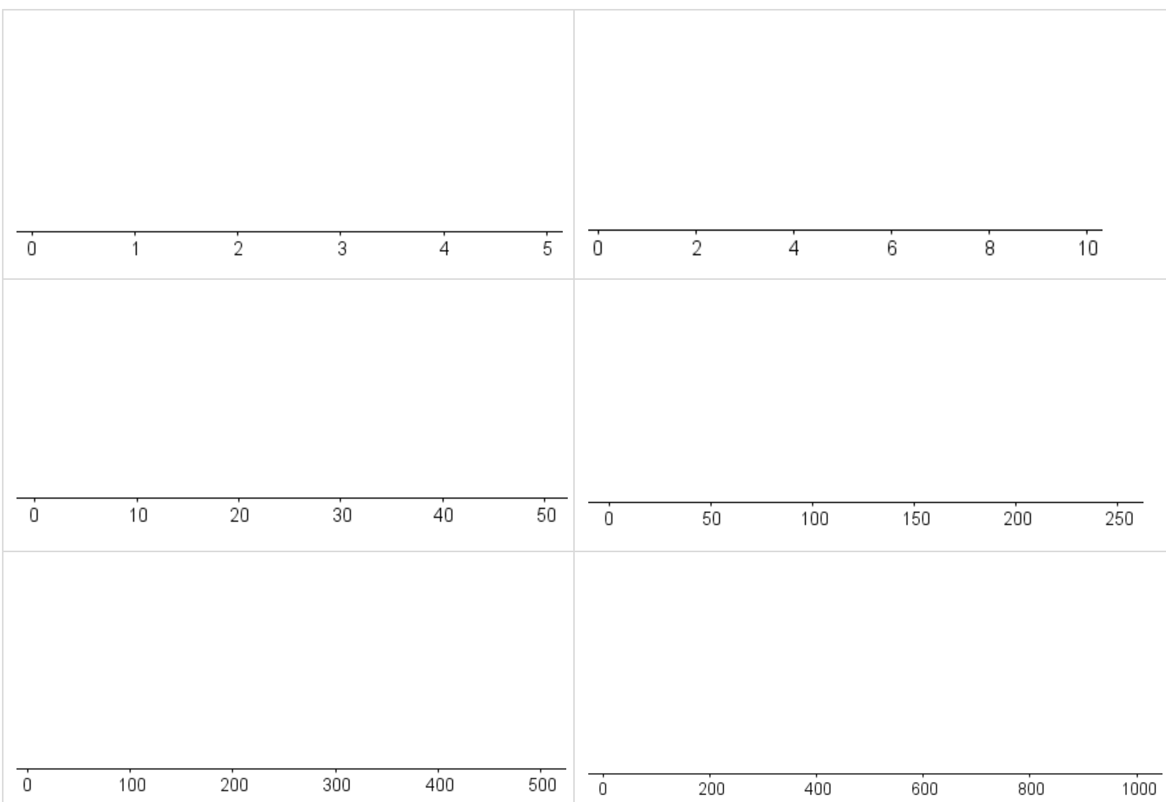


Fig. 3: Distribución de probabilidad de X a medida que n crece.

5. ¿Cómo varían las formas gráficas de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria a medida que n crece?
   a. ¿A qué forma se acercan las gráficas a medida que n crece?
   b. Indica a qué otra distribución de probabilidades se asemeja la distribución binomial cuando n es muy grande.
   c. Conjetura cómo podrías usar este hallazgo para determinar probabilidades y el aporte que puede dar esta aproximación.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES MEDIANTE LA APROXIMACIÓN NORMAL DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. ¿Cuáles son los parámetros que se necesita para determinar probabilidades según cada distribución?
   a. Indica los parámetros usados en la distribución binomial.
   b. Indica los parámetros usados en la distribución normal.
   c. ¿Cómo se puede determinar los parámetros requeridos en la distribución normal, usando los parámetros de la distribución binomial?
2. Usa la aproximación normal de la binomial para determinar la probabilidad de que, al elegir al azar 50 personas, 25 respondan como máximo que son felices. Registra los cálculos.
   a. Si hubieras determinado esta probabilidad mediante la distribución binomial, ¿qué dificultades habrías tenido?
   b. ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial? Argumenta.
3. Determina la probabilidad de que, al elegir al azar a 100 personas, exactamente 75 de ellas respondan que son felices. Argumenta.
   a. Sin hacer los cálculos, describe cómo los harías usando la distribución binomial.
   b. Conjetura una forma de calcular la probabilidad buscada, usando la distribución normal.
   c. ¿Cómo puedes hacer que la variable aleatoria discreta que estás considerando sea “ajustada” para ser continua? ¿Cómo podrías crear intervalos adecuados para ello?
   d. Elabora una regla para hacer una corrección de continuidad y compárala con las ideas de tus compañeros. Luego, en consenso, lleguen a la mejor corrección posible.
   e. Vuelve a determinar la probabilidad pedida en el punto 2, ahora aplicando la corrección por continuidad, y compara ambos resultados.

4. ¿En qué te basarías para decidir desde qué valor de n vale la pena utilizar la aproximación normal de la distribución binomial? Argumenta.
   a. Completa la tabla 1 con la probabilidad de distintos valores de la variable aleatoria y para un n dado.

Tabla 1: Comparación de probabilidades según cada distribución de probabilidad, variando n

Distribución de probabilidad	$P(x=3)$ $n=5$	$P(x=5)$ $n=10$	$P(x=25)$ $n=50$	$P(x=50)$ $n=100$	$P(x=125)$ $n=250$	$P(x=250)$ $n=500$	$P(x=500)$ $n=1000$
$B(n,p)$							
$N(\mu,\sigma)$							

   b. ¿Desde qué valor de n la diferencia entre la probabilidad determinada por $B(n,p)$ y $N(\mu,\sigma)$ es más pequeña que una centésima? Argumenta.
   c. Para ese valor de n determina:

$$n \cdot p = \_\_\_\_\_$$
$$n \cdot (1-p) = \_\_\_\_\_$$

   d. Prueba con algunos valores distintos de n entre 10 y 50 y analiza desde qué n las probabilidades determinadas por ambas distribuciones son muy cercanas.
   e. Conjetura una regla práctica para determinar desde qué valor de n conviene usar la aproximación normal de la binomial.

5. Vuelve a responder la pregunta: ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere vincular datos estadísticos con el cálculo de probabilidades, usando un contexto sencillo pero cercano a los estudiantes. Aunque ya deberían haber hecho esta tarea en niveles anteriores, sirve para reforzar nuevamente cómo, desde la estadística y eligiendo de forma adecuada la muestra (usando métodos probabilísticos), se puede obtener conclusiones acerca de la población, por ahora informalmente.

2. Se comienza preguntando si la situación se puede modelar con la distribución binomial y qué aportaría hacerlo, a fin de que revisen los conceptos previos que esta actividad requiere y también para que se acostumbren a hacer metacognición.

3. Usando algún programa, se puede comparar distintas gráficas de la distribución binomial a medida que n crece considerablemente (de 5 a 1 000) y observar cómo los datos van tendiendo a distribuirse normalmente; la herramienta de curva normal de GeoGebra ayuda a hacerlo. Deberán concluir que los datos se distribuyen normalmente cuando n es lo suficientemente grande. Si la probabilidad de éxito se aleja de 0,5, se necesita que n sea más grande para que la aproximación sea razonable. Conviene que, usando también GeoGebra, prueben con probabilidades distintas de 0,5 para notarlo.

4. En la primera actividad, se espera que usen la aproximación normal de la binomial; por eso, se les pide determinar una probabilidad que, si se hiciera con la distribución binomial, comportaría una tarea tan laboriosa que sería muy complejo cumplirla sin un recurso digital. Acá importa discutir con los alumnos sobre los aportes de las tecnologías actuales, pues hoy se puede determinar probabilidades con la distribución binomial para un n cualquiera, por grande que sea. La idea es mostrar cómo se usaría la aproximación normal si no se cuenta con dichos recursos digitales y, al mismo tiempo, que los estudiantes sepan cómo se ha ido construyendo la historia de las probabilidades, por qué antes era tan importante poder aproximar distribuciones binomiales a normales para determinar probabilidades, y por qué esto ha hecho que la distribución normal sea tan importante y estudiada con tanto detalle.
5. Las actividades siguientes buscan establecer las reglas necesarias para determinar probabilidades de datos discretos a datos continuos; por ende, se analiza la corrección por continuidad. Se recomienda hacer esta tarea más de una vez, hasta verificar que todos la comprenden. El profesor puede complementar esta parte con gráficos, ver las barras (binomial) y el histograma (normal), y discutir sobre los ajustes que se debe hacer.
6. La regla práctica –que se vincula con lo mencionado en el punto 3 sobre el valor de n y la probabilidad cercana o lejana a 0,5– se debe notar desde una tabla con distintas probabilidades determinadas, usando la distribución binomial y la normal. Si usan GeoGebra, no necesitan hacer la corrección de continuidad, pues permite determinar los valores buscados en forma inmediata. Una alternativa es usar GeoGebra solo para los cálculos con la binomial y calcular la normal a mano; así aprovechan de estandarizar y aplicar la corrección de continuidad.
7. Finalmente, más allá de todos los cálculos, se espera que los alumnos demuestren el aporte de aproximar la distribución binomial mediante una distribución normal, por lo que el docente debe propiciar una discusión al respecto.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Modelan situaciones que involucran aproximar una distribución binomial mediante el modelo normal.
   - Argumentan cuándo se puede modelar una situación o fenómeno con una distribución binomial o normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/graphing?lang=es
- Tabla de probabilidades de distribución normal estándar (solo las 2 primeras hojas)
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_tec_inf_gestion/estadistica/Documentacion/Tablas/tablas2caras.pdf

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal. **OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA e.** Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **OA i.** Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.	• Identifican las principales características de los modelos Bernoulli y binomial de probabilidades. • Identifican las principales características de una distribución normal de probabilidades. • Interpretan información estadística que involucra distribuciones de probabilidad binomial y el normal. • Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal. • Argumentan cuándo se puede modelar una situación o fenómeno con una distribución binomial o normal. • Modelan fenómenos o situaciones cotidianas, científicas y sociales mediante distribuciones binomiales y normales. • Modelan situaciones que involucran aproximar una distribución binomial mediante el modelo normal.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que trabajen colaborativamente algunas para que discutan y propongan estrategias que permitan llegar a la o las soluciones posibles.

I. Identificar el sentido de contar con datos distribuidos mediante una distribución binomial o una normal.

1. Explica por qué es posible (incluso recomendable) que en una empresa se considere un artículo defectuoso como éxito en un experimento binomial, al estudiar la probabilidad de obtener cierta cantidad de artículos defectuosos.
2. Un dado se lanza 20 veces y el número de veces que sale 2 se considera la variable aleatoria. Explica por qué la variable aleatoria es binomial en esta situación.
3. Cada vez se selecciona 10 cartas al azar de un naipe español, la variable aleatoria corresponde a sacar (o no sacar) la carta con símbolo 5, $X = \{0, 1\}$.

a. Explica por qué, si el experimento es con reemplazo (se saca una carta y se devuelve al mazo antes de sacar la siguiente), la variable aleatoria es binomial.
b. Explica por qué, si el experimento es sin reemplazo, la variable aleatoria no es binomial.

4. Se sabe que una variable aleatoria se distribuye normalmente:
   a. ¿Qué se puede decir de la variable aleatoria en términos generales?
   b. ¿En qué aporta saber que los datos son normales en su distribución para entender cómo se distribuyen?
   c. ¿Qué parámetros necesitas para determinar probabilidades?
   d. ¿Cuáles son las principales diferencias entre variables aleatorias que corresponden a modelos binomiales de distribución, respecto de las que corresponden a modelos normales?

5. La duración de los embarazos se distribuye normalmente con media de 268 días y desviación estándar 15 días.
   a. ¿Cómo se interpreta que los días de duración de los embarazos se distribuyan normalmente? ¿Cuál es el beneficio de saberlo?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que un embarazo dure exactamente 9 meses (de 30 días cada uno)?
   c. En Chile, una mujer que tenga sistema de salud Fonasa puede optar a financiar su parto mediante el bono PAD (Pago asociado al diagnóstico). Sin embargo, este no es válido si el parto se produce antes de las 37 semanas. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar no pueda usar el bono PAD (considerando que la media y desviación estándar son las mismas para este grupo de mujeres)?

II. Modelar situaciones con una distribución binomial y una distribución normal

1. Explica por qué "lanzar al aire una moneda honesta 50 veces y registrar las veces que sale cara" es un experimento binomial.

2. En un curso se aplica un control de 4 preguntas con 3 alternativas cada una, y un alumno que olvidó estudiar, decide responder las 4 preguntas al azar.
   a. ¿Hay alguna de las 4 preguntas que tenga más probabilidades de haber sido contestada correctamente que las otras?
   b. ¿Qué distribución de probabilidad modela adecuadamente esta situación? ¿Cómo usarás esta información para entender mejor el problema? Argumenta.
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya contestado una pregunta correctamente?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que haya contestado la mitad de las preguntas correctamente?
   e. Si el profesor dice que cada pregunta contestada correctamente vale un punto, y que con el 60% de logro se aprueba el control, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante lo apruebe?
   f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7? (Tener todas las respuestas correctas)
   g. Si todos los alumnos del curso contestan las 4 preguntas al azar, ¿cuál sería el número promedio de respuestas correctas del curso?

3. En 2019, una empresa debe reducir personal por problemas económicos. Toma la decisión según los sueldos, por lo que despedirá a todos los que ganen más de $ 6 000 000, y considera que los sueldos se distribuyen normalmente con desviación estándar $1 800 000 en la empresa. Esa reducción de personal corresponderá al 10% de los trabajadores.
   a. ¿Qué porcentaje de trabajadores gana entre la media de sueldos y los $6 000 000?
   b. ¿Cuál es la puntuación z en $6 000 000? (Busca el porcentaje de la curva normal que se considera hasta ese sueldo).
   c. ¿Cuál es el promedio actual de sueldos en esta empresa?
   d. ¿Cómo crees que las grandes empresas toman decisiones fundamentadas matemáticamente para mejorar sus ganancias? ¿Qué decisión tomarías tú en su lugar, basándote en datos estadísticos?

III. Modelar situaciones, usando la distribución normal y el teorema del límite central, y aproximar una distribución binomial mediante una normal

1. En promedio, la temperatura corporal de los niños es de 37 °C, con una desviación estándar de 0,34 °C. Si se selecciona al azar una muestra de 80 niños, ¿cuál es la probabilidad de obtener una media menor a 36 °C?
   a. Para determinar esa probabilidad, ¿hay que saber la distribución de las temperaturas de la población?
   b. Argumenten por qué pueden aplicar el teorema del límite central en este caso.
   c. ¿Qué parámetros usarán para la distribución normal de las medias de las muestras?
   d. ¿Por qué es necesario estandarizar para conocer $P(x < 36)$?
   e. ¿Cómo se interpreta la probabilidad obtenida?
   f. ¿En qué ayudó conocer la distribución de las medias de las muestras?

2. Una empresa de agua mineral sabe que las botellas pequeñas se llenan con 350cc de agua, con una desviación estándar de 3cc.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 50 botellas pequeñas tenga una cantidad media de, al menos, 354cc?
   b. A partir del resultado anterior, ¿será razonable pensar que las botellas pequeñas en realidad tienen una media de 350cc?
   c. Si la media no es 350cc, ¿se engaña a los consumidores?
   d. ¿En qué podría afectar a la empresa considerar una media diferente a la “media real”?
   e. ¿Cómo se puede usar este modelo de probabilidad en problemas de contextos similares? ¿Cuál es su aporte?

3. Una máquina industrial de deshidratado de manzanas presenta una falla que no se detectó a tiempo. Esto causó que 1/8 de la producción de 4 000 kilogramos presentara problemas de secado.
   a. Antes de calcular las probabilidades, ¿cómo se podría ajustar la distribución de los datos para modelarlos mediante una distribución normal?
   b. ¿Cuál sería el aporte de hacerlo?
   c. ¿Cuáles son las restricciones para hacerlo? ¿Se cumplen esas restricciones?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una muestra de 25 kilogramos, se encuentre un máximo de 3 kilogramos con problemas de secado?
e. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una muestra de 100 kilogramos, se encuentre máximo 50 kilogramos con problemas de secado?

4. El cáncer a la piel aumenta considerablemente cada año y causa la muerte en pacientes que no lo detectan a tiempo. Si se descubre a tiempo, el porcentaje de supervivencia es del 90% ¿Cuál es la probabilidad de que 200 o más personas sobrevivan al cáncer, de una muestra de 300 personas diagnosticadas a tiempo?
   a. Esta situación, ¿se puede aproximar mediante una distribución normal? Argumenta e indica los beneficios de hacerlo.
   b. ¿Qué otras preguntas de interés podrías responder en esta situación? ¿Tienes suficientes datos para ello? Argumenta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Identifican situaciones binomiales para caracterizar el contexto.			
Determinan la probabilidad de variables aleatorias binomiales.			
Explican situaciones aleatorias, utilizando el concepto de variable binomial.			
Interpretan situaciones según su distribución normal y la desviación estándar.			
Explican situaciones, utilizando el concepto de distribución normal.			
Identifican parámetros para determinar probabilidades en distribuciones normales.			
Determinan la probabilidad de intervalos en distribuciones normales, utilizando la tabla Z.			
Modelan situaciones, utilizando la distribución normal para determinar probabilidades de intervalos en situaciones sociales.			
Estandarizan variables para determinar la probabilidad según una distribución normal.			
Toman decisiones, basándose en la distribución normal y en el cálculo de probabilidades.			
Aproximan situaciones binomiales a distribuciones normales.			