Unidad 4: Comprender la integral como proceso de reversibilidad y cálculo de áreas

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden que la integral es el proceso inverso de derivar y, además, sirve para encontrar el área bajo la curva. Se comienza con funciones conocidas, sus derivadas y antiderivadas, para continuar con la integral definida y con aplicaciones en geometría, ciencias o economía. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se puede describir la relación entre el cambio y la superficie? ¿Cómo se puede describir las situaciones de cambio por medio del área?

Objetivos de Aprendizaje

OA 5.
Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Actividad 1: Describiendo la integral definida como área bajo la curva

PROPÓSITO

El primer objetivo es que los alumnos descubran –a partir del límite de una serie de rectángulos inscritos y circunscritos del área debajo una curva– la relación entre la integral definida y la antiderivada de funciones potencia o raíz cuadrada. Se espera que comparen los resultados del trabajo colaborativo y encuentren la regularidad en la integral definida $\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]$. Se pretende que resuelvan algebraicamente para determinar las funciones de derivadas y antiderivadas. Además (en el contexto de generar energía), se busca que recuperen gráficamente el cambio de una magnitud a partir de su forma en la razón instantánea, y que descubran una regularidad entre las ecuaciones de ambas funciones: constante → función lineal y función lineal → función cuadrática.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

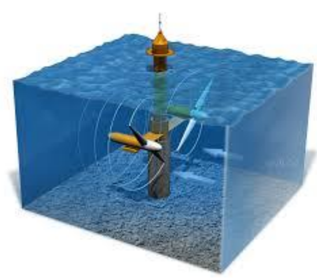
DESARROLLO

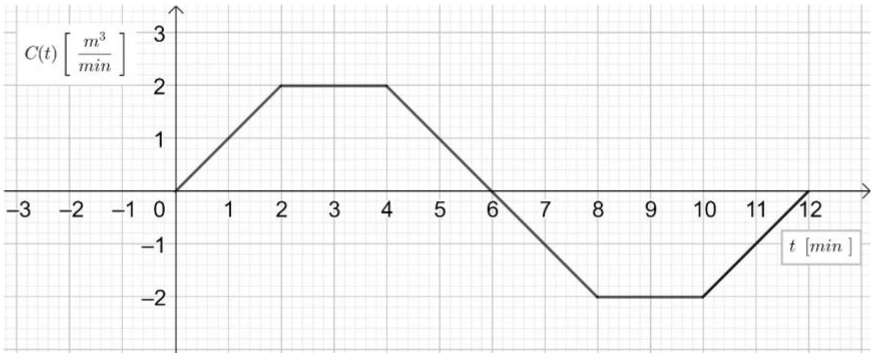
DESCRIBIENDO EL COMPORTAMIENTO DEL CAMBIO DE UNA MAGNITUD A PARTIR DE LA RAZÓN INSTANTÁNEA

1. Completa la tabla que pide determinar la ecuación de funciones f, derivada f', f'' y posible antiderivada F, y compárala con la de tu compañero.

Posible antiderivada F	Función f	Primera derivada f´	Segunda derivada f´´
	$f(x) = x^1$		
	$f(x) = a\ (a \neq 0)$		
		$f'(x) = c\ (c \neq 0)$	
	$f(x) = x^2$		
		$f'(x) = x^2$	
			$f''(x) = 0$
$F(x) = x^3 + x^2 + x$			
	$f(x) = \sqrt{x}$		
	$f(x) = e^x$		

2. En un laboratorio oceanográfico hidráulico se efectúa pruebas con corrientes de agua, para investigar la generación de energía eléctrica mareomotriz. En un experimento, inician la rotación de turbinas para estudiar la corriente de agua en una cámara. El gráfico representa la razón instantánea C del volumen de agua entrando en la cámara o saliendo de ella.





Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

a. Considerando los tramos del gráfico en los intervalos $[0,2],],[2,4]$, $[4,6]$, $[6,8]$, $[8,10]$ y $[10,12]$, elaboren la ecuación de la razón instantánea representada en los nuevos sistemas de coordenadas, empezando en el instante $t = 0$. Completen la siguiente tabla en sus cuadernos.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación de la razón instantánea C						

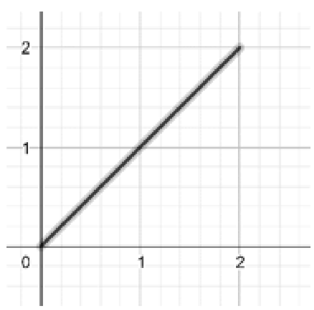


Figura 1

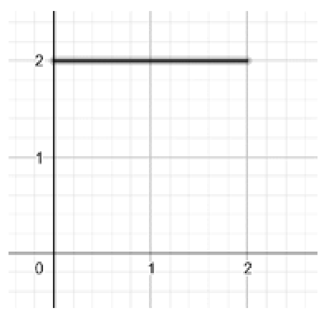


Figura 2

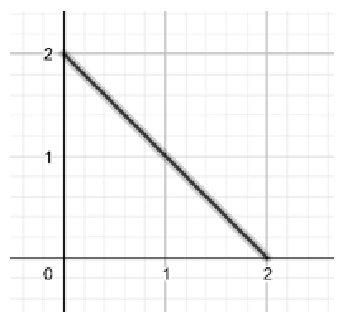


Figura 3

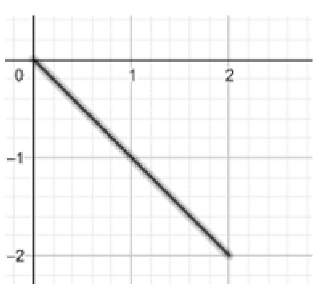


Figura 4

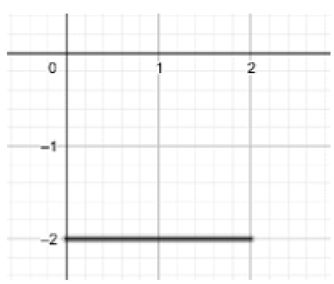


Figura 5

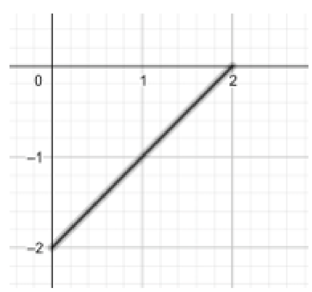


Figura 6

b. ¿Por qué el área debajo el gráfico representa el volumen del agua que entra en la cámara o sale de ella? Compartan su respuesta con un compañero.

c. ¿Cómo se nota en el gráfico, en qué fase entra el agua o sale el agua? Dibujen por separado sus respuestas y luego compartan las ideas.

d. Determinen mediante el gráfico, el volumen del agua que entra o sale de la cámara según los intervalos de $[0;\ 2]$. Completen la tabla.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Volumen sobre [0, 2]						

e. Determinen la ecuación de la función que representa el crecimiento o el decrecimiento del volumen V en la cámara. Completen la tabla.

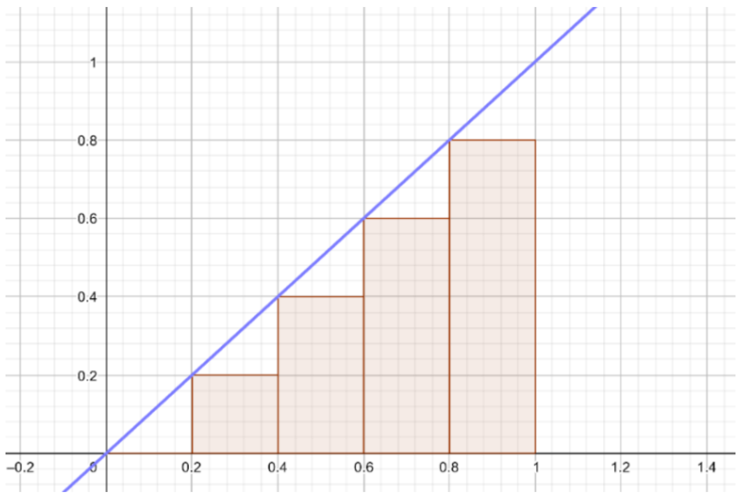
Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación del crecimiento o decrecimiento del Volumen V						

f. ¿Qué regularidad hay entre los tipos de funciones de la razón instantánea C y el cambio del volumen V? Expliquen su respuesta a un compañero.

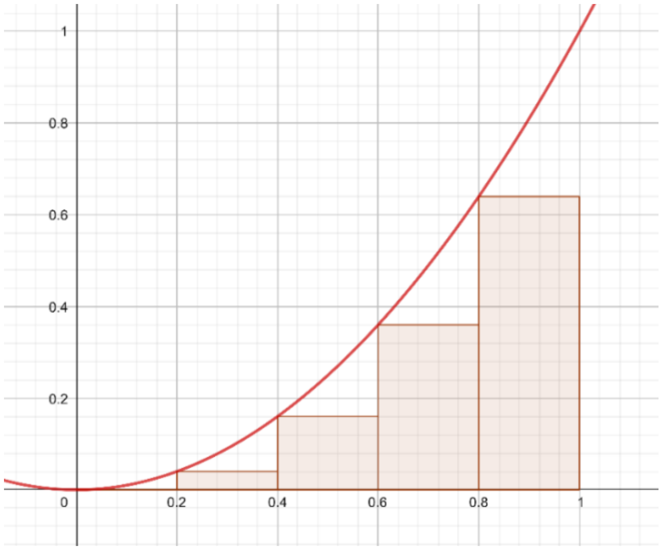
DESCUBRIENDO LA REGULARIDAD ENTRE LA FUNCIÓN QUE DELIMITA UN ÁREA Y LA FUNCIÓN QUE DETERMINA EL ÁREA BAJO EL GRÁFICO

1. A continuación, se muestra los gráficos de cuatro funciones:

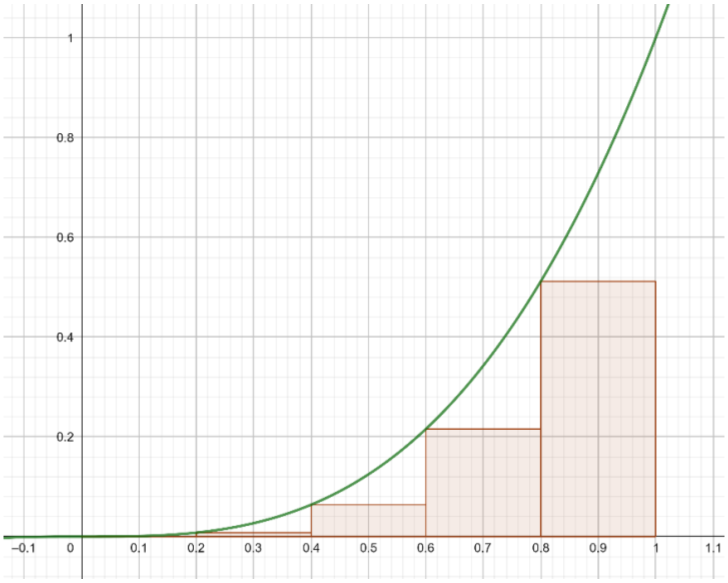
$\boldsymbol{f(x) = x^1}$



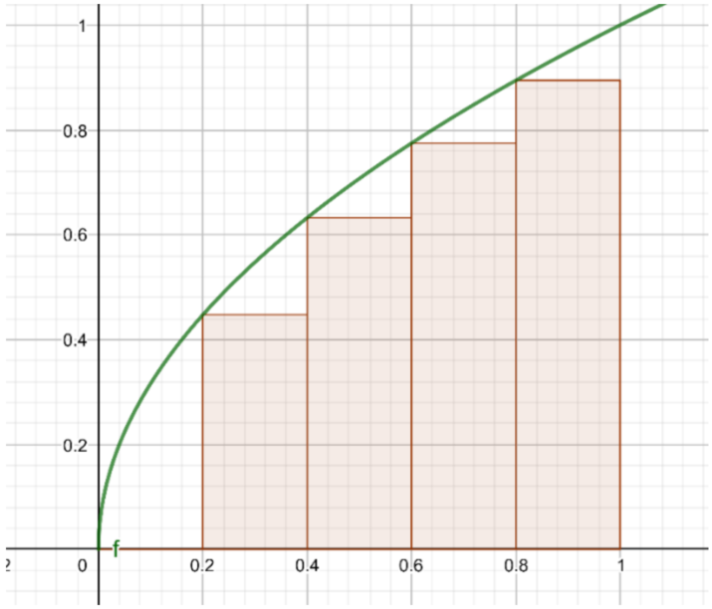
$\boldsymbol{g(x) = x^2}$



$h(x) = x^3$



$k(x) = \sqrt{x}$



Determinen el área debajo del gráfico sobre el intervalo $[\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ para todas las funciones.
Sugerencia: aproximar una serie de áreas de rectángulos inscritos con el mismo ancho $\boldsymbol{x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{1}{n}}$, cuya altura es $\boldsymbol{f(x_{n-1})}$.

2. Se considera la función f con $f(x) = x^1$.
   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
   c. Apliquen la fórmula del área del triángulo para verificar que el límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos es $\frac{1}{2}$.
   d. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

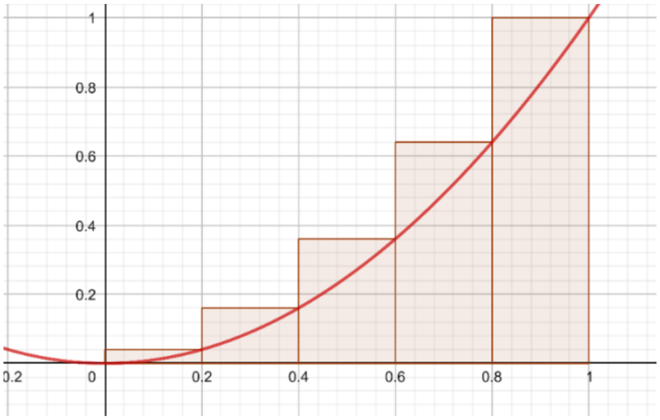
      $$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1).$$

      Para la suma (0 + 1 + 2 +… + n-1), se tiene la expresión algebraica $\frac{(n-1)\cdot n}{2}$.

      Determinen el límite $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
   e. Considerando que el límite del área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1], se puede representar por $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$, ¿cómo se puede representar –mediante una expresión algebraica– el área sobre el intervalo [0; x] y con las alturas $f(x_0) = {x_0}^1$ de los rectángulos en cada lugar x_0?

3. Se considera la función g con $g(x) = x^2$.
   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.
   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.
   c. Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $g(x_0) = {x_0}^2$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0;\ x]$ mediante una expresión algebraica?

4. Se considera la función g con $g(x) = x^2$ y se aproxima el área bajo el gráfico mediante rectángulos circunscritos.



   a. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \, (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

   Para la suma $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$, se tiene la expresión algebraica: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

   Determinen el límite $\lim_{n \to \infty} A_n$.

   b. Comparen los resultados anteriores: ¿hay diferencias o similitudes? Expliquen.

5. Se considera la función *h* con $h(x) = x^3$.

   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo [0;1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área debajo el gráfico sobre el intervalo $[0;\ 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

   c. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = (\frac{1}{n})^4 \cdot (0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)$$

   Para la suma de $(0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)$, la expresión algebraica es $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

   Determinen el límite $\lim_{n \to \infty} A_n$.

   Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $\mathrm{h}(x_0) = {x_0}^3$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0;\ x]$ mediante una expresión algebraica?

6. Considerando los resultados de las actividades anteriores, ¿qué regularidad se puede constatar entre la función f, cuyo gráfico delimita el área, y la función F que representa el área sobre el intervalo $[0;\ x]$? Verifiquen con:

   a. $f(x) = x^1;\ F(x)\ =$ ______________________________________

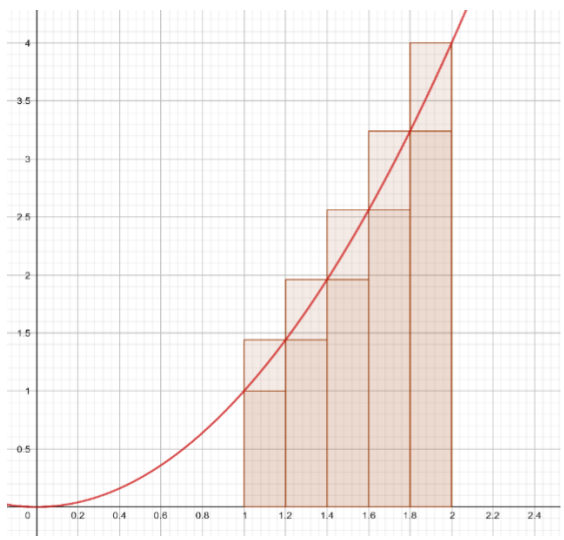
   b. $g(x) = x^2;\ G(x)\ =$ ______________________________________

   c. $h(x) = x^3;\ H(x)\ =$ ______________________________________

   d. Generalicen para $r(x) = x^m, m\ \in \mathbb{N}\ R(x)\ =$ ______________________________

   e. ¿Cuáles son las funciones que resultan, si se derivan las funciones F, G, H y R?

7. Se considera la función g con $g(x) = x^2$. La imagen muestra una aproximación inferior y superior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.



   a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada.

   b. Utilizando un graficador digital, se puede encontrar más aproximaciones; redondeen a las centésimas y represéntenlas en una tabla.

   c. Conjeturen acerca del límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos, y represéntenlos como fracción.

d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función *G*, determinando la diferencia *G*(2) – *G*(1).

rectángulos	inferior	superior
20	2,26	2,41
50	2,30	2,36
100	2,32	2,35
200	2,33	2,34

8. Se considera la función k con $k(x) = \sqrt{x}$.

a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

c. Suponiendo que la regularidad entre las funciones f y F existiría también para “funciones potencias” con exponentes fraccionarios:

- ¿Qué función F puede resultar para la función f con $f(x) = \sqrt{x}$?
- ¿Qué número se puede esperar como límite del área sobre intervalo $[0; 1]$?

DETERMINAR EL ÁREA BAJO UNA CURVA

1. Se considera la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$, cuyo gráfico se muestra, junto con una aproximación superior e inferior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.

Función l

a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
b. Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
c. Apliquen la regularidad encontrada en 5 y determinen la ecuación funcional de la función L para la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$.
d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función L (resultado de G en 5), determinando la diferencia $L(2) - L(1)$.

2. Se considera la función j con $j(x) = \frac{1}{x}$. ¿Por qué la regularidad entre f y F encontrada en 5, no existe en este caso? Expliquen sus respuestas dentro del grupo.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre el área y el volumen: Algunos ejercicios pueden ser:
   - ¿Cuál es la diferencia entre área y volumen?
   - ¿Cómo se calcula el área de un cuadrilátero cualquiera?
   - ¿Cómo se calcula el volumen de un paralelepípedo?
   - Describe la red de un paralelepípedo y de un prisma, e identifica los elementos básicos que te permiten reconstruir estos cuerpos por repetición.
   - Describe las fórmulas de volumen para los cuerpos que ya conoces.
2. Se recomienda comenzar con ejercicios en que los jóvenes establezcan las derivadas y posibles antiderivadas de funciones polinómicas, y luego descubran la regularidad que existe entre la función f de la curva que delimita el área y la antiderivada F, con la cual se determina el contenido del área bajo la curva.
3. Al obtener resultados y hacer representaciones, obtienen una primera impresión intuitiva sobre la regularidad entre la función que delimita el área y la función con la cual se establece el contenido del área bajo la curva.
4. Igual que en la actividad en la cual descubrieron la regularidad entre tangente, razón instantánea y derivada, para la integral se recomienda que usen una sola función de potencias con exponente natural para explicar y representar en detalle la relación entre la curva y la integral definida. Luego conviene seguir con la función "raíz cuadrada", y revisar la derivada y la integral en una representación gráfica y mediante cálculos.
5. Se sugiere verificar en cada caso las regularidades que se dan tanto en una familia de la función potencia, como en una familia de la función raíz cuadrada; tales regularidades permiten observar y concluir lo común que resulta del procedimiento de determinar la integral definida. Si ya surgen preguntas acerca de funciones potencia con exponente entero negativo, hay que aludir a otra familia de la función potencia y realizar el trabajo con herramientas digitales para facilitar las representaciones y los cálculos.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado.
   - Elaboran el modelo del área bajo la curva como una noción básica de la integral.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html

- Explicación de la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/

- Definición de la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ecured.cu/Integral_definida

Actividad 2: Representar y aplicar la integral definida

PROPÓSITO

Los alumnos aplican las reglas básicas de las integrales definidas, para evitar un procedimiento extenso en el cálculo de la integral definida. Entienden las nociones de la derivada y de la integral definida, estableciendo los ejes en plano cartesiano con base en gráficos de funciones F, f y f'. Determinan el volumen de un cilindro cuya base tiene forma de un segmento parabólico. En la segunda actividad, se espera que investiguen una situación del ámbito económico y recuperen las funciones de los costos C y de los ingresos I de una producción, por medio de integración.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

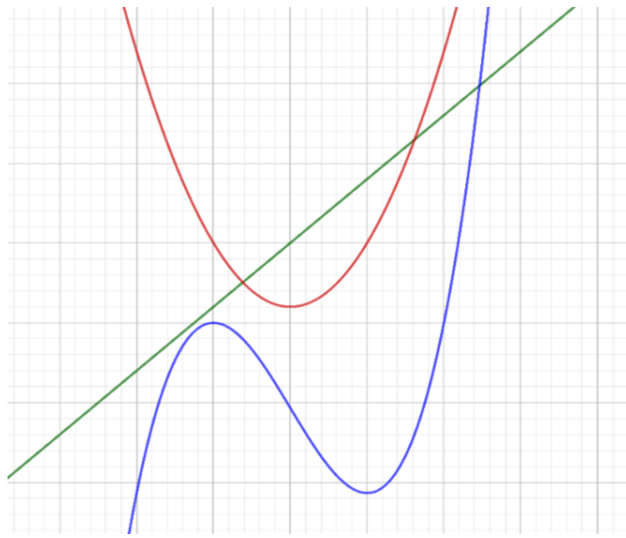
REPRESENTAR LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, Y CONJETURAR AL RESPECTO

1. Establece las siguientes integrales definidas:
   a. $\int_{-2}^{5} 3x^2\,dx$ - $15\int_{-2}^{5} \frac{1}{5}x^2\,dx$.
   b. $\int_{1}^{4} (2^2 + 3\sqrt{x^2-1})\ dx$ - $3\int_{1}^{4} \sqrt{x^2-1}\,dx$.
   c. $\int_{2}^{5} (x^3 - 2x^2)dx + \int_{5}^{2} (x^3 - 2x^2)dx$

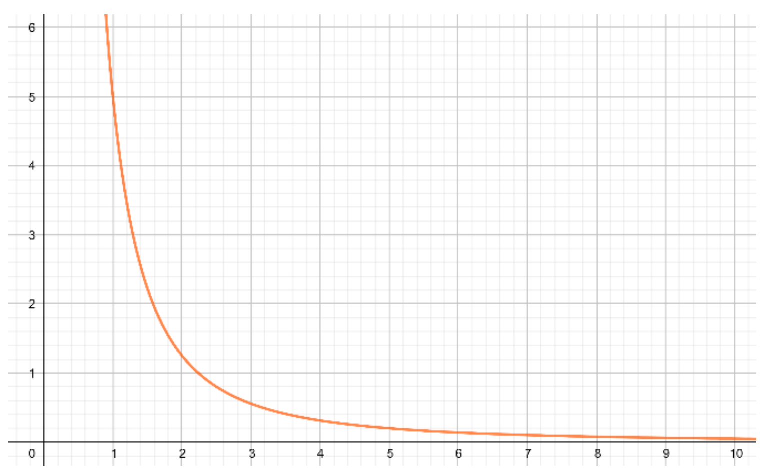
La imagen muestra los gráficos de tres funciones. Una función se llama f, otra es la derivada f' de f y la última es una posible antiderivada F de f.

¿Cuáles de los gráficos en rojo, azul o verde, representan f, $f´$ o F respectivamente? Da, al menos, un argumento para cada respuesta y menciona las propiedades entre función, derivada y antiderivada.

Dibuja los ejes de coordenadas y argumenta la decisión para cada eje.



La imagen muestra el gráfico de la función f con $f(x) = \frac{5}{x^2}$. Determina el siguiente límite del área debajo del gráfico: $\lim\limits_{t-\infty} \int_1^t \frac{5}{x^2} dx$



MODELAR LA CONTAMINACIÓN EN UN TÚNEL, USANDO INTEGRALES

1. El túnel de la foto tiene un corte transversal en forma de parábola con un ancho en el suelo de 8m y una altura máxima de 8m también.

   a. Elijan adecuadamente un sistema de coordenadas y determinen la ecuación de la parábola que delimita el corte transversal del túnel. (Resultado para seguir: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$)

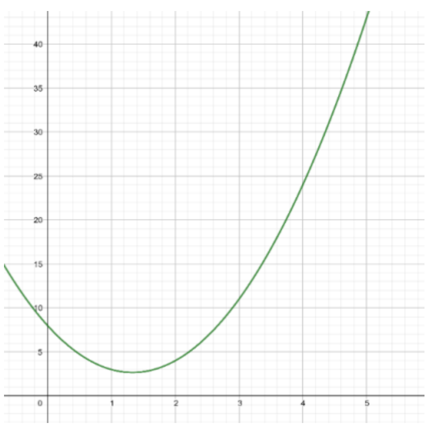
   b. El túnel, con 380m de largo, es de una construcción antigua y no tiene ventilación. Para modelar la concentración de carbono de dióxido en el caso de una congestión vehicular en su interior, se requiere saber el volumen del túnel; establézcanlo.

MODELAR LOS COSTOS, USANDO INTEGRALES

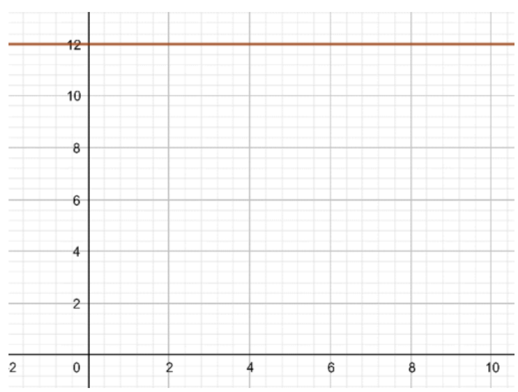
2. De la fabricación de un producto industrial se conoce la función C', que representa la razón instantánea de los costos C, en dependencia de la cantidad *x* de unidades producidas.

   Además, también en forma de razón instantánea, se dispone de la función I' de los ingresos I obtenidos por la venta del producto dependiente de x. La razón instantánea C' se representa por la ecuación $C'(\mathrm{x}) = 3x^2 - 8x + 8$ y la razón instantánea I' se representa por la ecuación $I'(x) = 12$. Los costos C_0 fijos en la producción son de 4 (unidades monetarias).

   Las imágenes muestran los gráficos de las funciones C' e I'.



Función C'



Función I'

   a. Determinen la función de los costos C mediante la integración, con el procedimiento $C(x) = \int_0^x C'(t)dt$, considerando los gastos fijos C_0 mencionados.

   b. Elaboren el gráfico de la función C con herramientas digitales como GeoGebra.

   c. Determinen la función de los ingresos I mediante la integración, con el procedimiento $I(x) = \int_0^x I'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

d. Elaboren el gráfico de la función I con herramientas digitales.

e. Comparen los gráficos de $C´$ e $I´$ con los gráficos de C e I y verifiquen las relaciones que existen entre los puntos extremos y los puntos de inflexión.

f. Considerando los gastos C y los ingresos I, ¿con qué operación entre ambas funciones se modela las ganancias G en dependencia de la cantidad producida? Argumenten y comuniquen sus respuestas.

g. Elaboren la ecuación de la función G y grafiquen mediante herramientas tecnológicas.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda comenzar repitiendo las reglas de integración, como integral de una suma o diferencia, influencia de un factor constante o cambio del margen superior por el inferior, para establecer las integrales definidas de manera más sencilla.
2. Se sugiere representar gráficamente en el plano cartesiano, algunos "triples" de funciones f, $f´$ y F con toda la información, como ecuación funcional, puntos extremos y de inflexión. Conviene que usen herramientas digitales.
3. Se recomienda volver a la noción de límite y del cálculo de límites, repitiendo eventualmente el límite de una expresión fraccionaria para $x \rightarrow \infty$.
4. La actividad de costos tiene el mismo problema de economía que se presentó en el contexto de las derivadas. En este caso, la única diferencia que hay en la "partida" del problema es que empieza con las derivadas $I´$ y $C´$ de las funciones de los ingresos I y de los costos C.
5. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Verifican, para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, en el cual la función F es la antiderivada de f.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html
- Explicación de la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/
- Aplicaciones a la administración y la economía
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm

Actividad 3: Aplicación de la integral a diversos contextos

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan de forma colaborativa aplicando los conocimientos sobre la integral, para dar respuestas a problemas en contextos de salud y economía. Se espera que entiendan que la integral es un modelo de la situación planteada y que el cálculo de integrales permite responder a las situaciones planteadas. Además, comprenden que, con estos modelos, se puede tomar decisiones fundamentadas para administrar dosis de medicamentos y solucionar problemas de costos de la producción de baterías.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

MODELANDO UNA SITUACIÓN DE MEDICINA Y SALUD CON LA INTEGRAL DEFINIDA

Durante las primeras 17 horas luego de una operación, a un paciente se le aplica una solución fisiológica. La razón instantánea del caudal de la solución está programada por una bomba: sube en las primeras 5 horas hasta $4{,}5\,\frac{mg}{h}$ y baja más lentamente hasta $0\,\frac{mg}{h}$ en el instante $t = 17h$.

El gráfico representa la función $f´$ con

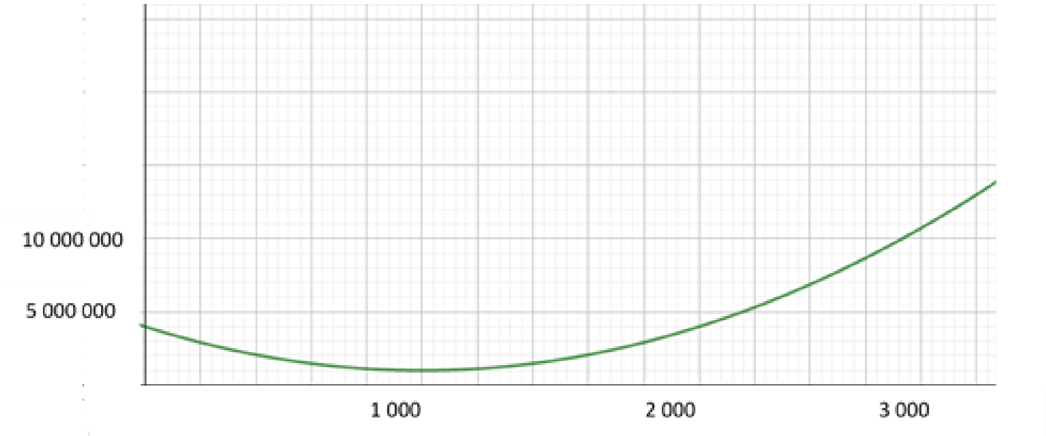
$f´(t) = \frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}$, que modela aproximadamente la razón instantánea del caudal de la solución fisiológica que se aplica al paciente en la fase postoperatoria.

a. Determina la dosis total de la solución fisiológica aplicada en las 17 horas.
b. Conjetura si a la mitad del tiempo se ha aplicado la mitad de la dosis, y verifica o rechaza algebraicamente esa conjetura.
c. Establece en qué instante se ha aplicado la mitad de la dosis total.

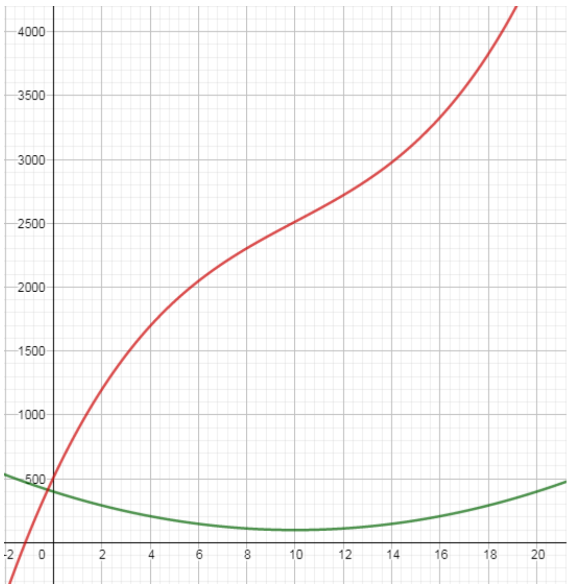
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

MODELANDO UNA SITUACIÓN DE ECONOMÍA CON LA INTEGRAL DEFINIDA

El gráfico muestra la razón instantánea C' de los costos C por unidad en la producción de baterías para la electromovilidad de autos. El eje horizontal representa la cantidad producida y el eje vertical, la razón instantánea C' del precio.



a. La función C' con $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ modela la razón instantánea de los costos por unidad producida. Verifica algebraicamente que la razón instantánea tiene un mínimo relativo para $x_0 = 1\,000$.
b. Determina los costos totales de una producción de $1\,000$ unidades.
c. Mirando el gráfico, conjetura si la producción de las próximas $2\,000$ unidades (hasta $3\,000$) tiene el doble de los costos de las primeras $1\,000$ unidades.
d. Conjetura, utilizando al menos 3 argumentos, si la curva en rojo modela la función C de los costos totales.



e. ¿Qué decisiones tomarías para mejorar los costos de producción?
f. ¿Cómo te ayuda el cálculo de la integral a tomar decisiones relacionadas con costo y producción?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere mostrar gráficamente el significado del caudal de la solución y relacionarlo con el cálculo de volumen de medicamento que se administra. Cabe hacer notar que la función entregada se refiere a la primera derivada y que, para encontrar la función del caudal, se debe integrar.

2. En ambos casos, se recomienda que usen herramientas digitales para elaborar los gráficos de las funciones que modelan las situaciones. También se puede hacer un análisis previo de estas funciones para determinar puntos críticos de la función y luego contrastar con el contexto y formular preguntas.

3. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Determinan antiderivadas *F* de funciones *f* para establecer la integral definida, en contextos científicos, económicos y cotidianos.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html
- Explicación de la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/
- Aplicaciones a la administración y la economía
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm

Actividad 4: Aplicación de las integrales a la geometría

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan colaborativamente para comprender el método de los discos, que permite determinar el volumen de cuerpos redondos generados por la rotación de una generatriz alrededor del eje X. Utilizan una estrategia para establecer volúmenes de cuerpos, realizando cálculos manuales o digitales para apoyar, simplificar y potenciar las actividades propuestas.

Objetivos de Aprendizaje

OA5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

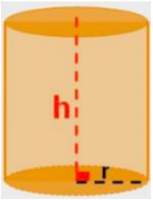
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

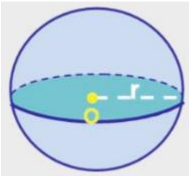
CALCULANDO VOLÚMENES DE CUERPOS REDONDOS

La siguiente imagen resume las fórmulas de cada volumen y, donde corresponda, se denomina el área basal como A_B, el radio como r y la altura como h:



$$V = A_B \cdot h$$
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Ilustración 1. Cuerpos redondos[8]

[8] Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR4.jpg

I. Volumen del cilindro

El cilindro es un cuerpo “redondo”, debido a que se puede generar por la rotación[9] de un rectángulo en torno a uno de sus lados, como muestra la imagen[10] adjunta.

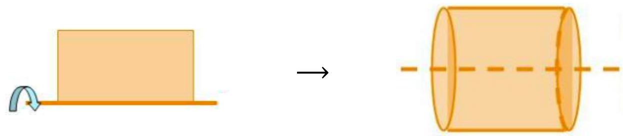
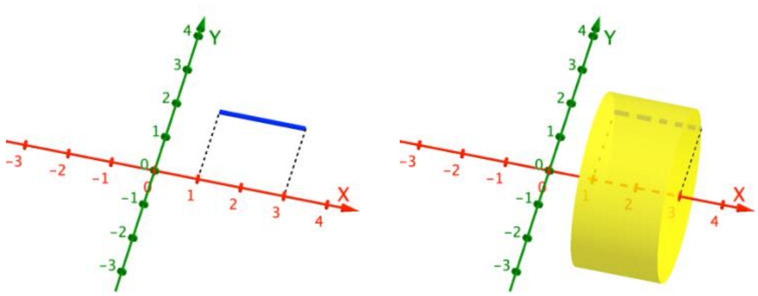


Ilustración 2. Generación de un cilindro

Observen que, en el applet sugerido a pie de página, el rectángulo y el eje tienen una orientación vertical; en cambio, en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Se puede generar el mismo cilindro si el rectángulo y el eje de rotación están horizontales o están verticales. Esto es importante para realizar los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos usar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

Considerando este modo de generar un cilindro y que daremos por cierta la fórmula del cilindro (que es área basal por altura), usaremos esta última para deducir la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, utilizando integrales (“método de los discos”).

A partir de la visualización del applet y de la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cilindro se puede generar por una rotación de un segmento de recta paralelo al eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea paralelo a dicho eje, indica que la función que rota es una recta con pendiente igual cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f\colon [1{,}3] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$ (que es una recta con pendiente $m = 0$), cuya gráfica muestra la Ilustración 3.a.



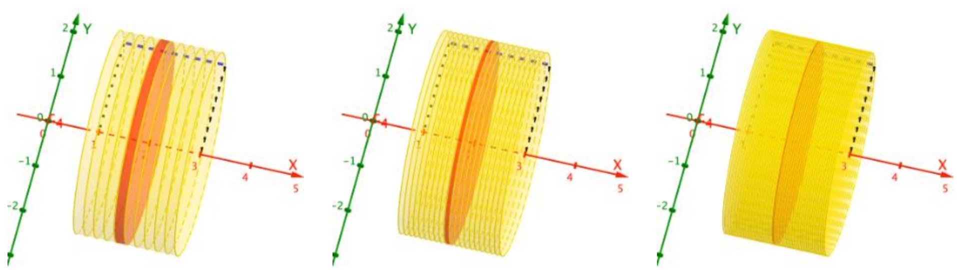
a. b.

Ilustración 3.
Cilindro generado por revolución de un rectángulo.

[9] Puedes ver cómo se genera un cilindro a partir de un rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)
[10] Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

El cilindro resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X se muestra en la Ilustración 3.b. Para calcular el volumen de cuerpo, consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros infinitesimalmente delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo.

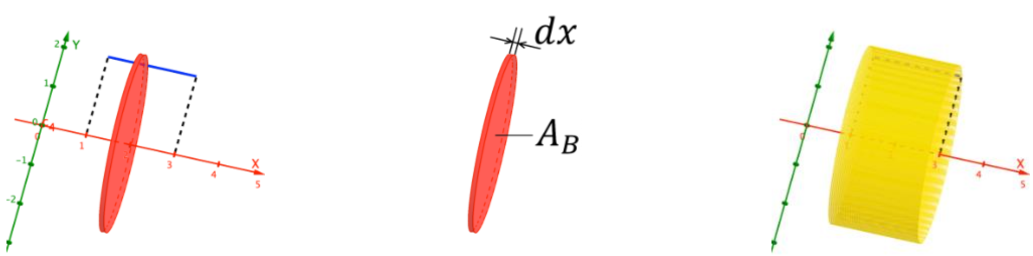
La Ilustración 4.a muestra el cuerpo compuesto por 10 cilindros, la Ilustración 4.b muestra 20 y la Ilustración 4.c muestra 50. En cada una, se ha destacado un cilindro para resaltar el aspecto que tiene:



a. b. c.

Ilustración 4.

Si se sigue el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal –que llamaremos dx–, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 5.a) tendrá un área basal $\mathrm{A_B}$ y una altura dx. Por lo tanto, cada cilindro infinitesimal tendrá un volumen igual a $A_B \cdot dx$ (Ilustración 5.b) y el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 5.c).



a.
Uno de los cilindros infinitesimales

b.
Volumen de un cilindro infinitesimal: $A_B \cdot dx$

c.
El volumen del cuerpo es $\int_1^3 A_B\, dx$

Ilustración 5.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales.

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ ___________ unidades cúbicas.

II. Volumen del cono

El cono también se llama cuerpo “redondo”, debido a que se puede generar por la rotación[11] de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[12] adjunta (análogo: el cilindro se genera a partir de un rectángulo).

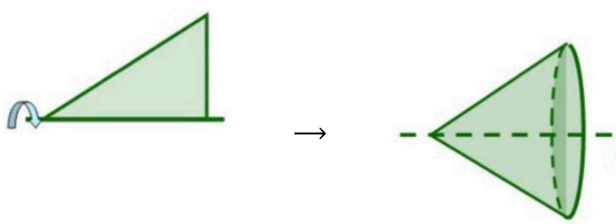


Ilustración 6. Generación de un cono

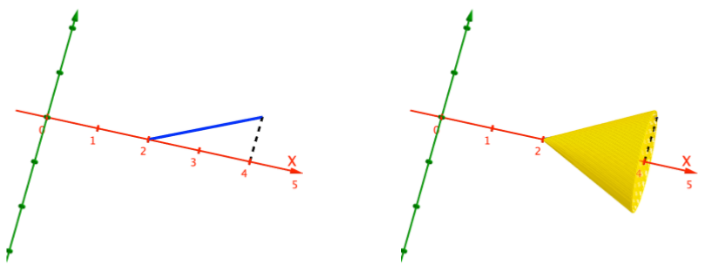
Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el triángulo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para hacer los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

[11]Puedes ver cómo se genera un cono a partir de un triángulo rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)

[12]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

Considerando este modo de generar un cono, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de un cono, utilizando integrales (“método de los discos”).

Después de visualizar el applet y la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cono se puede generar por una rotación de un segmento de recta oblicuo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea oblicuo, indica que la función que rota es una recta con pendiente distinta de cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ (que es una recta con pendiente $m = \frac{1}{2}$) cuya gráfica muestra la Ilustración 7.a siguiente.



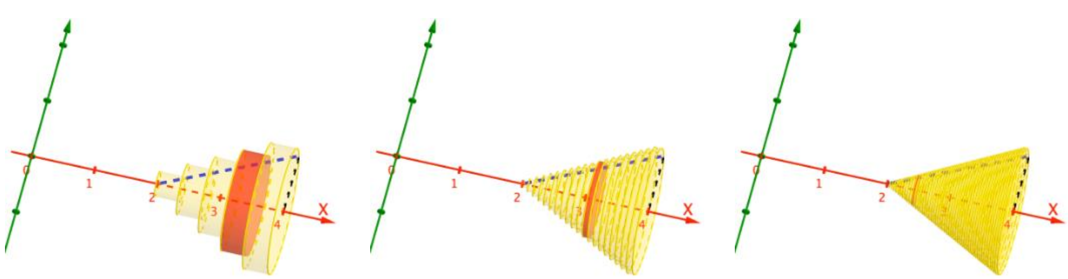
a. b.

Ilustración 7.

Cono generado por revolución de un triángulo rectángulo.

La Ilustración 7.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

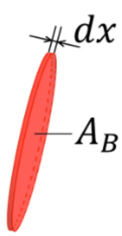
Para calcular el volumen del cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo. La ilustración 8a. muestra al cuerpo compuesto por 5 cilindros; la Ilustración 8.b. muestra 20 y la Ilustración 8.c muestra 50. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



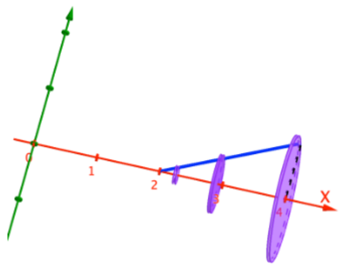
a. b. c.

Ilustración 8.

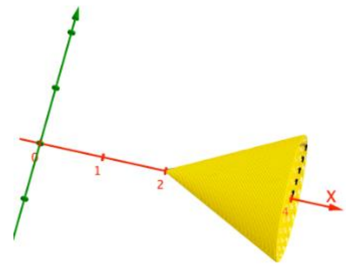
Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Así, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 9.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 9.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$, es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 9.c).



a.
El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$



b.
Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.



c.
El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B\, dx$

Ilustración 9.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto$x$ en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado, y escríbelo a continuación:

$V =$ ___________ unidades cúbicas.

III. Volumen de la esfera

El tercer cuerpo llamado "redondo" es la esfera, que también se puede generar por la rotación[13] de un semicírculo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[14] adjunta.

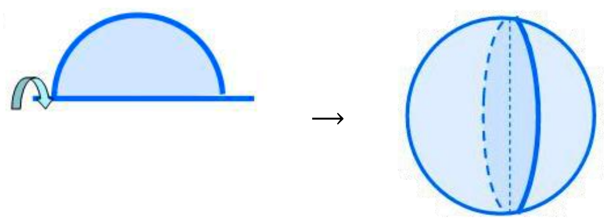
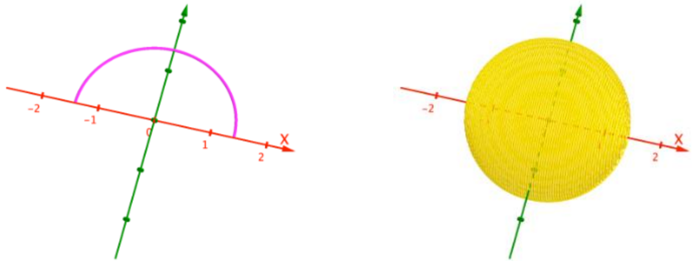


Ilustración 10. Generación de una esfera

Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el semicírculo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para calcular con integrales, pues usaremos funciones; en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar. Considerando este modo de generar una esfera, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de la esfera, utilizando integrales (método de los discos).

Después de visualizar el applet y la Ilustración 11, sabemos que se puede generar una esfera por una rotación de un semicírculo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). En este caso, la función que rota es una semicircunferencia; como ejemplo, consideraremos la función $f:[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$, cuya gráfica muestra la Ilustración 11.a.

[13]Puedes ver cómo se genera una esfera a partir de un semicírculo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción esfera)
[14]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

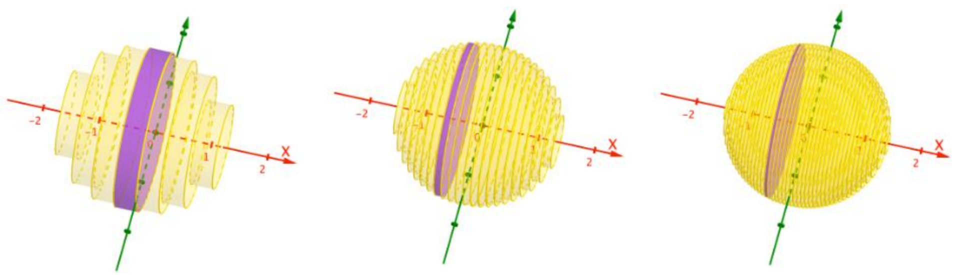


a. b.

Ilustración 11.

La Ilustración 11.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

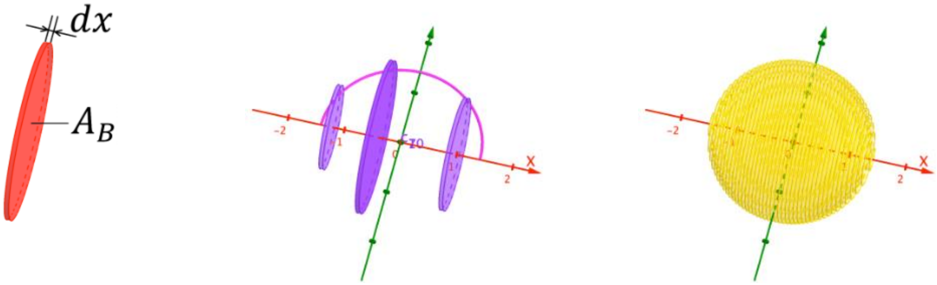
Para calcular el volumen de cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen de la esfera. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen la esfera. La Ilustración 12.a muestra al cuerpo compuesto por 10 cilindros; la Ilustración 12.b. muestra 30 y la Ilustración 12.c muestra 60. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



a. b. c.

Ilustración 12.

Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 13.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 13.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 13.c).



a. El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$

b. Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.

c. El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B\, dx$

Ilustración 13.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ _____________ unidades cúbicas.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Las actividades individuales se inician con un resumen de los tres sólidos básicos que se puede concebir como generados por revolución de elementos lineales simples (segmento paralelo al eje X, oblicuo al eje X y una semicircunferencia sobre el eje X simétrica al eje Y). Los tres ejemplos de cálculo de volumen se situaron convenientemente en el eje X para no aumentar la complejidad de entrada del cálculo del volumen que se realizará.

2. La idea que subyace a este diseño para calcular el volumen del cilindro es que el alumno se enfoque en el método de los discos para establecer el volumen de sólidos de revolución con integrales; asimismo, se busca que perciba que, como conoce el volumen del cilindro, no aumenta la complejidad del cálculo de los discos ni de la integral resultante.

3. Se recomienda que, antes de la clase o cuando empiece, los jóvenes vean el applet que visualiza la generación de cilindros, conos y esferas https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR, para que tengan una noción geométrica de la idea de rotación de un elemento lineal para generar un sólido. Esto ayudará a la primera explicación asociada al cálculo del volumen del cilindro y a familiarizarlos con las imágenes de este punto y los siguientes.

4. Se sugiere visualizar dinámicamente, en el applet http://www.curriculumnacional.cl/, cómo aumenta la cantidad de cilindros al mismo tiempo que disminuye su altura. En las imágenes asociadas, se destacó –con uno de esos cilindros de otro color– la manera en que estos cilindros se van modificando a medida que aumenta el refinamiento. Se debe tratar la segunda idea de disco de espesor infinitesimal, ya que es imposible "ver" uno de estos discos; los jóvenes debiesen captar que son discos infinitamente delgados y de allí que su altura se defina por un diferencial de x (dx). Este es un salto al límite que debiesen realizar para relacionarlo con las integrales.

5. Conviene que los ayude a formalizar la deducción del volumen de un cilindro con el método de los discos. El cambio de $b - a$ por h busca que la fórmula obtenida sea la misma que se presentó en el resumen, al inicio de esta actividad.

6. En el punto 2, se aborda el cálculo del volumen del cono. Este estudio es muy análogo al primero y se propone las mismas recomendaciones anteriores; eso sí, hay que agregar que la función generatriz del cono es una recta oblicua al eje X (en el caso del cilindro, es paralela). Esto implica que se tiene una función generadora que es lineal o lineal afín, por lo que la expresión algebraica contiene x (no es una constante, como en el caso del cilindro).

7. El procedimiento propuesto para calcular el volumen es idéntico al anterior y el cálculo es sencillo, salvo que la integral es un poco más laboriosa. Conviene que el docente acompañe a los estudiantes cuando concreten la fórmula de volumen de un cono según el método de los discos; para que entiendan ese método, recuérdeles los conceptos que articulan aquella fórmula. Si ya establecieron la fórmula del volumen del cilindro, esa formalización debiese ser más clara, aunque es algebraicamente más laboriosa.

8. En el punto 3, la función generatriz de la esfera es una semicircunferencia y su forma algebraica es del tipo $f(x) = \sqrt{p - x^2}$. Esto implica que se tiene una función generadora que es un radical, y la integral que deben obtener eleva a $f(x)$ al cuadrado, eliminando el radical y dejando una integral que, nuevamente, tiene polinomios simples integrados.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan representaciones de figuras geométricas para determinar áreas y volumen.
   - Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video que explica la generalización del método de discos alrededor del eje x: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/calculus-home/integral-calculus/ic-int-app/modal/v/generalizing-disc-method-around-x-axis
- Visualización de un sólido de revolución entre dos funciones: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/BZWTCPfd
- Visualización del método de los discos:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/fy3c4pyf
- Applet con visualización de sólidos de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/gDDvkMAm
- Ajuste de curva para generar un sólido de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PuBVTMep

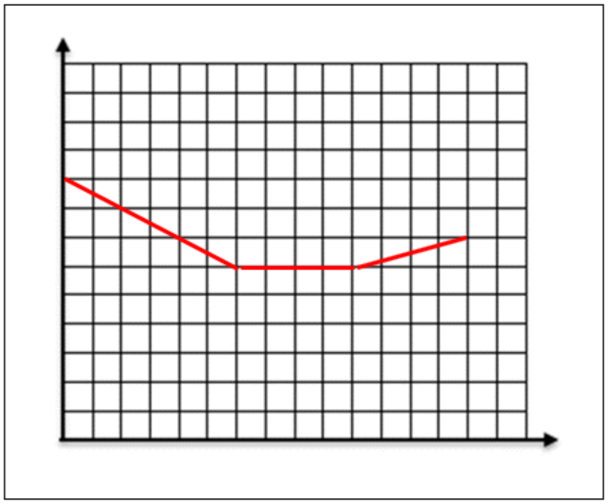
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.	• Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado. • Verifican para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, en el cual la función F es la antiderivada de f. • Determinan antiderivadas F de funciones f para determinar la integral definida, en contextos científicos, económicos y cotidianos. • Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

Duración: 6 horas pedagógicas

A continuación, se muestra algunas actividades que sirven como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas, donde el estudiante trabaje individualmente por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el alumno puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

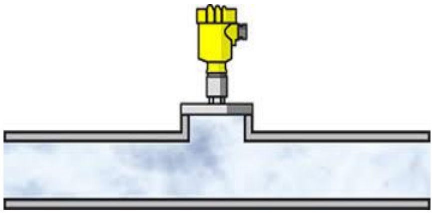
1. La imagen muestra el gráfico de razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ del volumen de un líquido en un recipiente. El eje horizontal representa el tiempo t.



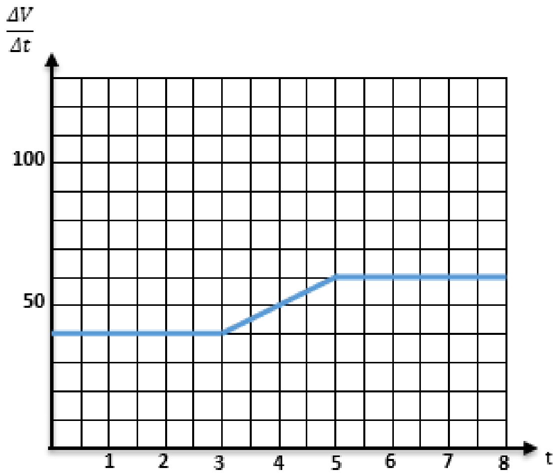
   a. Marca en el gráfico los instantes en los cuales se cambia la razón instantánea del volumen.
   b. ¿En qué intervalos la razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ es invariante, positiva o negativa?
   c. Elabora para cada intervalo, por separado, un gráfico esquemático del volumen V mismo en dependencia del tiempo.
   d. Argumenta acerca del tipo de función que representa el volumen V en dependencia del tiempo.

Recuperar informaciones del cambio a partir de su razón instantánea.

1. El gráfico representa la razón instantánea del volumen de vapor que transporta una tubería.

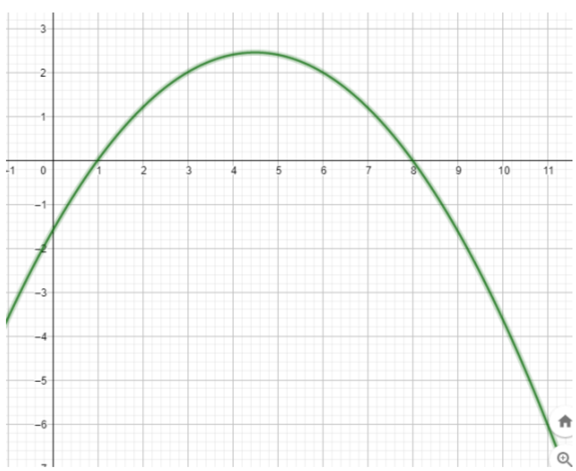


La escala del tiempo es de minutos [min] y la de la razón instantánea es de $[\frac{m^3}{min}]$



a. Describe verbalmente el comportamiento de la razón instantánea del volumen, en el intervalo de tiempo [0 min, 8min].
b. Mediante el gráfico, recupera el volumen total del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
c. Elabora el gráfico del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
d. Compara la función del cambio con la función de la razón instantánea del cambio. ¿Qué tipo de funciones son?

2. El gráfico representa la función f con $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{8}{5}$.

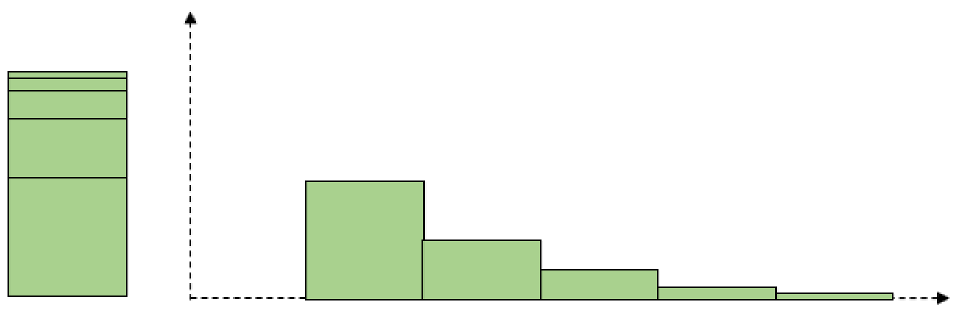


a. Verifica algebraicamente los puntos de intersección con los ejes del sistema de coordenadas.
b. Determina el vértice de la parábola mediante la derivada f' de f, y compáralo con el gráfico.
c. Calcula la integral definida de la función f en los márgenes de $a = 0$ y $b = 12$. $\int_0^{12} f(x)\ dx$

d. Argumenta acerca del resultado numérico.
e. Se quiere pintar el área que se encuentra bajo la curva y el eje X. Determínala en unidades de área contando los cuadraditos del gráfico.
f. Compare este conteo con el resultado obtenido en c.
g. Considere que la función f interpreta la razón momentánea de los ingresos por venta de un producto, obtenidos en dependencia de la cantidad x de unidades vendidas. Determina los ingresos máximos (eje x: una unidad de medida representa 1 000 unidades, eje y: una unidad de medida representa 10 000 UF) ¿qué podría significar el cálculo del área en este contexto?

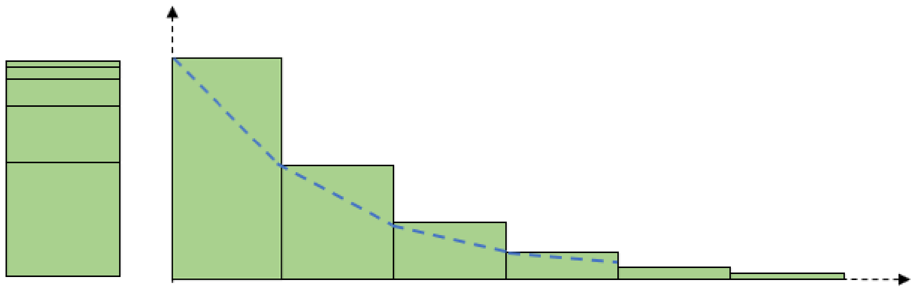
Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $x \to \infty$ o $x \to x_0$.

1. La imagen muestra una pila de rectángulos, todos representan el ancho 1m y las alturas h disminuyen, empezando con 1m, $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{4}$m, …,$\frac{1}{2^{n-1}}$m.
Se coloca los rectángulos de la pila uno al lado del otro, empezando con el más grande, como muestra la figura. Describan a un compañero lo que entienden.



a. Marquen con un punto rojo en cada rectángulo, el vértice en la posición izquierda arriba y junten los vértices marcados, trazando una curva adecuada que represente de mejor forma la disminución de las alturas.
b. Extrapolen la curva hacia la izquierda y marquen aproximadamente el punto de intersección con la línea vertical punteada. ¿Cuál sería la altura del rectángulo que antecede al primer rectángulo representado?
c. La suma infinita de las alturas $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +\ldots$ representa una serie geométrica. Determinen el sumando en la posición n.
d. Determinen el límite de la suma de las alturas para encontrar después el área de la suma infinita de los rectángulos ($\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$, en la cual a_0 es el primer sumando y q, el cociente constante).
e. La curva dibujada en la actividad a. separa todos rectángulos en dos partes. Estimen el contenido de la suma infinita de las áreas que están debajo la curva.

f. Considerando el gráfico de segmentos ¿qué función resulta si se reduce el ancho de todos los rectángulos? Argumenten y expliquen la respuesta.



g. Desarrollen la ecuación de la función f que representa la curva roja dibujada en la actividad a.

h. Apliquen la igualdad entre q^t y $e^{t \cdot lnq}$ para expresar la ecuación de la función exponencial f a la base del número Euler e.

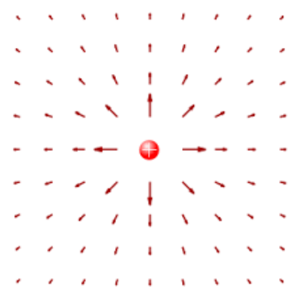
i. Determinen el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\ dt$ y contrástenlo con el límite estimado.

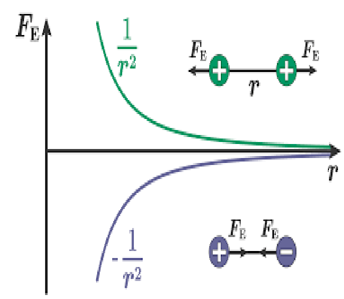
Para la tarea "Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $\boldsymbol{x} \to \infty$ o $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$" puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Identifican la invarianza del área de un objeto cuando se descompone en partes.	Describen la descomposición de un rectángulo en partes más pequeñas y lo relacionan con el área de la figura.	Describen la descomposición del rectángulo en partes más pequeñas.	Describen el rectángulo y el gráfico de forma independiente.
Relacionan una partición finita con procesos que se pueden repetir infinitamente.	Determinan la altura del rectángulo, extrapolando (a partir de la información inicial del problema) la altura del triángulo anterior.	Determinan la altura del rectángulo, dibujando la curva de forma aproximada.	Determinan la altura de un rectángulo cualquiera.
Relacionan la serie geométrica con la suma infinita de áreas de los rectángulos.	Determinan el límite de la serie geométrica y lo relacionan con el área de la suma infinita de los rectángulos.	Determinan algún límite y algún área, utilizando sumatorias infinitas y propiedades de límites.	Realizan cálculos que corresponden a la operatoria básica con números.

Relacionan el área bajo la curva con la partición en rectángulos que están sobre y bajo ella.	Comparan las áreas obtenidas por rectángulos que están sobre la curva y bajo ella, usando la noción de límites.	Determinan el área bajo la curva, usando la noción de límites.	Determinan áreas de figuras rectangulares asociadas a otros problemas.
Relacionan el área bajo la función cociente con el logaritmo natural.	Asocian los resultados del área y límites con los valores del logaritmo natural.	Disminuyen la base de los rectángulos utilizando límites, y determinan la función cociente.	Disminuyen la base de los rectángulos, utilizando procedimientos numéricos.

2. El campo eléctrico radial E de una carga eléctrica Q no es homogéneo y aumenta proporcionalmente a $\frac{1}{r^2}$ respecto de la distancia r del centro de la carga. Si una carga de prueba q del mismo signo está frente a la carga Q, actúa una fuerza repelente sobre ambas. Esta fuerza se llama "Fuerza de Coulomb"; se calcula mediante la fórmula $F_E = \mathrm{k} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, en la cual el factor k contiene una constante natural y r es la distancia entre el centro de ambas cargas. Para determinar la energía eléctrica W_{el}, que se obtiene cuando se acerca una carga de prueba q a la carga Q a la distancia r, se debe aplicar la integración, porque la fuerza eléctrica no es constante. Además, se pone el nivel "0" de la energía a una distancia r_∞ infinitamente lejos de la carga Q, porque allá la fuerza F_E es infinitésimamente pequeña.





Así se calcula la energía: $W_{el} = \int_{r_\infty}^{r} F_E \, dr$

a. Elaboren la integral con la cual se determina la energía eléctrica en dependencia de Q, q y r.

b. Determinen el límite $\lim\limits_{r_\infty \to \infty} \int_{r_\infty}^{r} F_E \ dr$, en el cual F_E representa la fuerza "F_E" y no la antiderivada de una función f.

c. Determinen cuánta energía eléctrica acumula una partícula α al acercarse a una distancia de $\mathrm{r} = 10^{-10} m$ del núcleo de un átomo de oro. Busquen las informaciones de la constante k, la carga de partícula α y la carga del núcleo del átomo de oro en la web.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Describen la razón instantánea de cambio por medio de la derivada.			
Usan la integral definida para calcular el volumen.			
Determinan el área bajo la curva, utilizando la integral definida.			
Relacionan el límite de series con la integral definida.			
Describen el área bajo la curva, usando aproximaciones por rectángulos.			
Modelan situaciones, utilizando la integral definida.			