Unidad 3: Modelar situaciones de cambio con derivadas

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden las nociones básicas de la derivada como la razón de cambio y la pendiente de la tangente a la curva. En ambos casos, se ve de forma intuitiva que la derivada implica un límite y que permite dar respuestas a problemas geométricos, económicos o científicos. En esta unidad, podrán representar la derivada, modelar situaciones, resolver problemas y derivar de forma simbólica para construir el significado de la derivada. Las siguientes preguntas pueden orientarlos: ¿Cómo se relaciona el cambio de una situación con la derivada? ¿Cómo modelar el comportamiento de las situaciones de cambio?

Objetivos de Aprendizaje

OA 3.
Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA 4.
Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actividad 1: Describiendo el cambio por medio de la derivada

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden que la razón instantánea en un punto es el límite de una sucesión de razones medias. Trabajan con funciones y con expresiones indeterminadas (como cero divido por cero), aprovechando las herramientas disponibles para aprender, visualizar y resolver problemas sobre funciones, y las expresiones relacionadas con el cero y el infinito. Relacionan la inexistencia de una tangente con la inexistencia de una razón instantánea de cambio, e investigan y practican en lo posible el experimento de Galileo Galilei de forma colaborativa.

Objetivos de Aprendizaje

OA3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

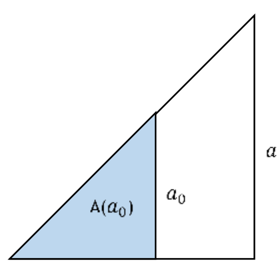
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ SIGNIFICA LA RAZÓN DE CAMBIO EN UN CONTEXTO GEOMÉTRICO?

1. En la figura, tanto el triángulo sombreado inscrito como el triángulo blanco son triángulos rectángulos isósceles con un vértice común. El triángulo azul crece en dependencia del lado a.



a. ¿Qué relación tiene la expresión $\frac{a^2-a_0^2}{2(a-a_0)}$ con el triángulo? Describe la expresión $\frac{a^2}{2}$ y luego las diferencias para terminar con toda la expresión; ¿qué significado le puedes dar a la fracción?

b. Si se habla de cambio y de razón instantánea, ¿qué expresión representaría la razón entre el área del triángulo sombreado y el lado a? Descríbela con tus propias palabras a un compañero.

c. Se considera la razón instantánea en el instante $a_0 = 2$, ¿por qué no se la puede determinar valorando con $a_0 = 2$ en la expresión algebraica?

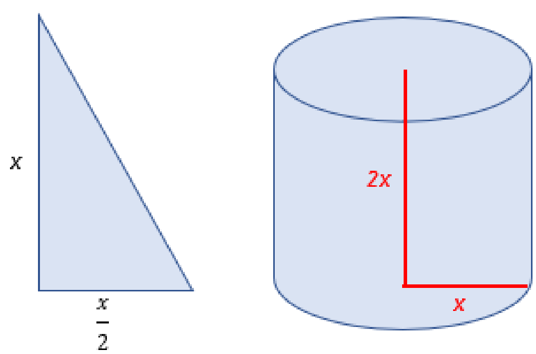
d. Completa la siguiente tabla para determinar la razón instantánea en el instante $a_0 = 2$.

a	1	1,5	1,9	1,99		2,01	2,1	2,5	3
$\frac{a^2-4}{2a-4}$									

e. ¿Qué ocurre con el límite en el punto $a_0 = 2$? Argumenta tu respuesta utilizando cálculos, sin olvidar el contexto geométrico.

f. ¿Qué significado tiene el límite en este contexto?

2. La imagen muestra un triángulo rectángulo y un cilindro recto.



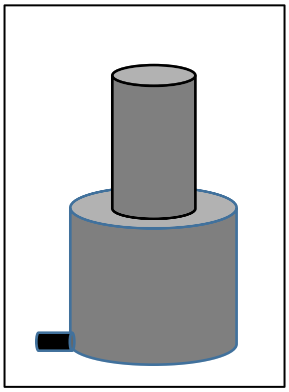
a. Determina la expresión algebraica del área del triángulo rectángulo.

b. Determina la expresión algebraica del volumen del cilindro recto y forma la función con respecto a la altura.

c. Crea tu propio problema de razón de cambio para el caso de un cilindro; sombrea si es necesario.

d. Elabora una tabla de datos donde tú mismo des los valores. Crea una lista de tus observaciones y compara con el ejercicio anterior.

3. La figura muestra dos recipientes cilíndricos compuestos, de los cuales el recipiente inferior tiene el doble del diámetro del recipiente superior. Se llena la combinación de los dos recipientes con un caudal constante de $c = 314\frac{cm^3}{min}$.



   a. Elabora la ecuación de la altura h de la superficie del agua en dependencia del tiempo t durante el proceso de llenado.
   b. Conjetura acerca de la razón instantánea de la altura h en el momento t_0 en el cual se empieza a llenar el recipiente superior.
   c. Verifica o rechaza la conjetura mediante un procedimiento algebraico.
   d. ¿Existe una tangente en el gráfico de la función de la altura h en el momento t_0? Explica tu respuesta a un compañero.

¿CUÁL ES LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO Y EL DESPLAZAMIENTO DE UN OBJETO?

La imagen muestra la ilustración del famoso experimento de Galileo Galilei (1564-1642), en el que Galileo descubrió la relación entre el tiempo y el recorrido en el movimiento de una bola deslizándose hacia abajo en una viga inclinada.

1. Observa la imagen y descríbesela a un compañero.
   a. ¿Qué piensas que están haciendo?
   b. ¿Qué objetos están en juego?
   c. ¿Qué relación podría tener con el tema de trabajo?
   d. ¿Observas algún cambio? ¿Qué relación tiene con el experimento?
   e. ¿Por qué la dependencia entre el recorrido d y el tiempo t se puede modelar con una función cuadrática?
   f. Determina, con base en los resultados del experimento histórico, el parámetro k en la ecuación $d(t) = k \cdot t^2$.

2. Utilizando una calculadora y basándote en los resultados "ideales" con t y D, elabora una sucesión de velocidades promedio para los intervalos de tiempo $[3{,}9;\ 4]$, $[3{,}99;\ 4]$, $[3{,}999;\ 4]$, $[3{,}9999;\ 4]$ y $[3{,}99999;\ 4]$, acercándose al instante $t = 4$ desde la izquierda. ¿A qué valor se acercan las velocidades medias?

3. Repite el procedimiento para las velocidades promedio en $[4;\ 4{,}1]$, $[4;\ 4{,}01]$, $[4;\ 4{,}001]$, $[4;\ 4{,}0001]$ y $[4;\ 4{,}00001]$, acercándose al instante desde la derecha. Comparando ambas sucesiones de las velocidades medias, ¿cuál sería el límite de ambas sucesiones?

4. Con el mismo procedimiento de aproximar la velocidad media con sucesiones de velocidades promedio, se obtiene para $t = 2$ la velocidad instantánea de $v(2) = 132\ \left[\frac{p}{u}\right]$. Para $t = 8$ se obtiene $v(8) = 528\ \left[\frac{p}{u}\right]$. ¿Con qué tipo de función, en dependencia de t, se puede modelar la velocidad instantánea de la bola?

> Conexión interdisciplinaria:
> **Ciencias para la ciudadanía.**
> OA c, d, 3° y 4° medio

   a. Elabora una tabla con velocidades promedio y después, la ecuación de la función de la velocidad instantánea.

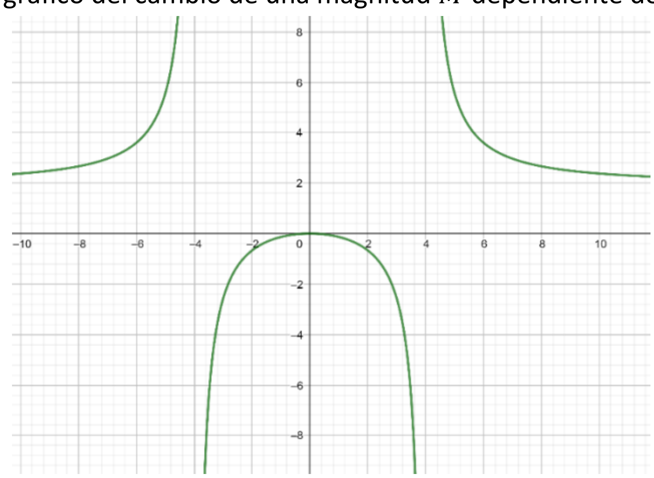
   b. Comparando las ecuaciones de $d(t)$ y de $v(t)$, ¿qué llama la atención, si se compara los exponentes y el parámetro k con factor proporcional de la velocidad instantánea?

   c. Elabora el gráfico de la función del desplazamiento d. ¿Qué se representa gráficamente mediante las velocidades promedio y la velocidad instantánea?

   d. ¿Qué representa gráficamente la función v de la velocidad instantánea?

¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE LA RAZÓN INSTANTÁNEA DE CAMBIO?

La imagen muestra el gráfico del cambio de una magnitud M dependiente del tiempo t.



a. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es positiva.

b. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es negativa.

c. ¿En qué instante la razón instantánea del cambio es 0?

d. ¿En qué instante no existe una razón instantánea del cambio?

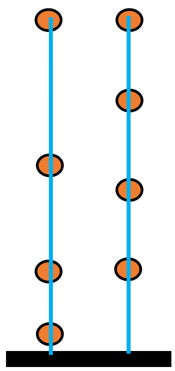
e. ¿A qué valor se acerca la razón instantánea del cambio para $t \to \infty$ o para $t \to -\infty$?

¿TODOS LOS OBJETOS CAEN AL MISMO TIEMPO?

Si es posible, realiza este experimento con tu grupo de trabajo; para ello, lee las ideas de Galileo y consigue los materiales. Galileo consideró que su experimento con la viga inclinada se puede transformar en un experimento de la caída libre para el cual el ángulo de la inclinación de la viga se elevaría a 90°.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA g, 3° y 4° medio

En el experimento se fijan cuatro tuercas en un hilo. Se sujeta el hilo sobre un molde de lata como suelo, de manera que el extremo libre del hilo toque el molde. En el primer hilo se fijan las tuercas a las siguientes distancias sobre el molde: 5cm, 20cm, 45cm y 80cm. En el segundo hilo se fijan las tuercas en forma equidistante de 20cm entre ellas.



a. Conjetura sobre la ley que resulta con la viga en 90°. ¿Piensas que será la misma que en el caso de la viga inclinada? ¿Por qué?

b. Para comenzar con el experimento, elabora una lista de materiales y organízate con tu grupo para distribuirse las tareas.

c. Se suelta el primer hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?

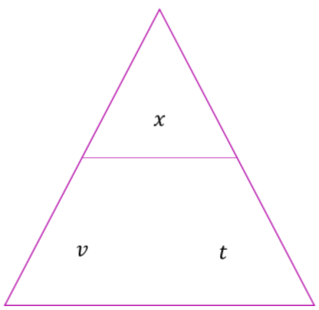
d. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.

e. Se suelta el segundo hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?

f. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre la velocidad. Algunos ejercicios pueden ser:
   - Describe la fórmula de la velocidad y explícale a tu compañero las variables que están involucradas.
   - ¿Cuál de las siguientes alternativas describe mejor la velocidad?
     a. Mientras mayor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
     b. Mientras menor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
     c. Mientras mayor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
     d. Mientras menor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
   - ¿Piensas que la velocidad es directa o inversamente proporcional al tiempo? ¿Qué relación hay entre la distancia y la velocidad?
   - Para resolver los ejercicios a continuación, utiliza el siguiente esquema (si quieres encontrar una de las variables, debes taparla con tu mano y veras la operación que se debe realizar; por ejemplo: si deseas encontrar la distancia x, la tapas con tu mano y debajo queda la multiplicación de la velocidad por el tiempo $v \cdot t$):



     e. Alondra anda en bicicleta una ruta de 5,2 km en 12 minutos. Para la misma ruta, Pablo necesita 14 minutos. Determina la velocidad promedio de Alondra y Pablo.
     f. El señor Ovalle maneja de Curicó a San Fernando (68,8 km) con una velocidad promedio de 65 $\frac{km}{h}$; en cambio, el señor Bulnes lo hace con una velocidad promedio de 82 $\frac{km}{h}$. ¿Cuánto tiempo necesitan ambos para recorrer la distancia entre ambas ciudades?
     g. ¿Qué distancia puede recorrer Ana en 5 minutos si camina a una velocidad de 12,7 $\frac{km}{h}$? ¿Qué velocidad puede lograr Emilio en 30 minutos si anda con su bicicleta a velocidad promedio de 30 $\frac{km}{h}$?
     - ¿Qué entiendes por velocidad promedio? ¿Qué diferencias hay con la velocidad constante?
     - Da ejemplos de tu vida donde esté involucrada la velocidad y descríbelos a tu compañero lo mejor posible.

2. Se recomienda incluir una reflexión acerca de expresiones indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$ para que constaten que hay que determinar la razón instantánea mediante un procedimiento infinitesimal de acercamiento. Para esto, se puede plantear ejercicios como:
   a. Factorizar $\frac{2x^2-2}{3x+3}$ y simplificarlo a la forma más reducida.
   b. ¿Para qué valor de x se indefine la expresión algebraica $\frac{x^3-x^2}{x^3+x^2}$?
3. Se sugiere hacer el experimento en clases y dejar que los estudiantes tomen sus propios datos. A partir de su experimento, pueden elaborar conjeturas y luego comparar con lo ocurrido históricamente. Para lograrlo, tienen que hacer un registro tabular de muchos datos y de repeticiones del experimento, y elaborar gráficos y ecuaciones de forma algebraica.
4. En la última actividad, hay que destacar que las mediciones de tiempo de precisión del siglo XVI no eran tan sofisticadas como hoy, así que cualquier indicio o ayuda tecnológica que los jóvenes puedan ofrecer y que sea de fácil acceso, beneficiará la medición del experimento.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio.
   - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
   - Identifican el cociente de la razón de cambio cuando es igual a cero, con un cambio en la función.
   - Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Artículo sobre el plano inclinado
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.br/pdf/rbef/v34n2/v34n2a08.pdf
- Información sobre Galileo y el péndulo
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://cuantozombi.com/tag/plano-inclinado/

Actividad 2: Describiendo la derivada como función de pendientes de rectas tangentes

PROPÓSITO

Los estudiantes analizan el comportamiento de funciones y comparan este comportamiento de forma local y global. Resuelven problemas científicos, pensando con flexibilidad para reelaborar sus ideas y puntos de vista sobre la aplicación de las funciones al mundo real. Además, representan las funciones, argumentan sus respuestas y realizan cálculos algebraicos en situaciones dentro del contexto matemático, y aplicados al mundo real.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

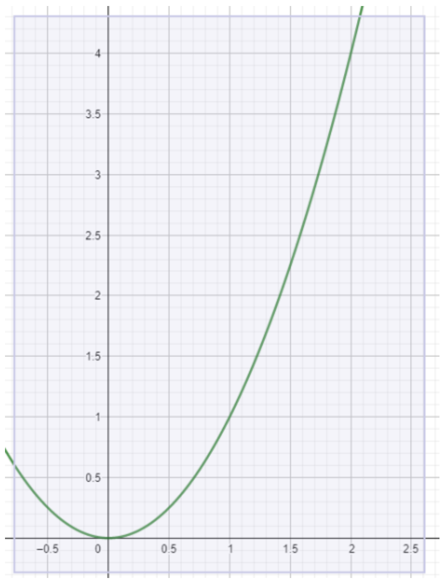
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

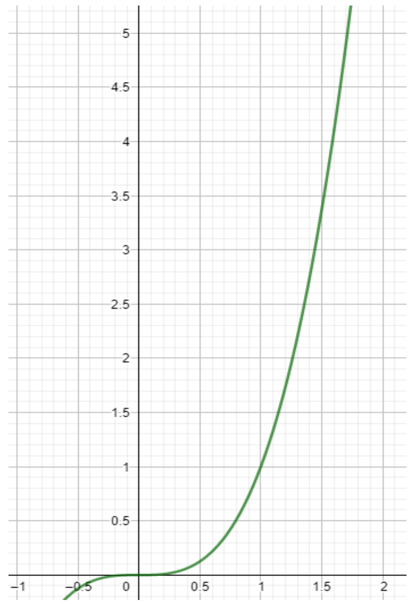
Duración: 12 horas pedagógicas

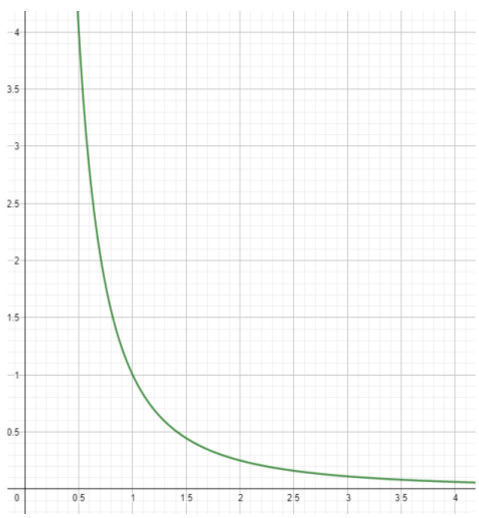
DESARROLLO

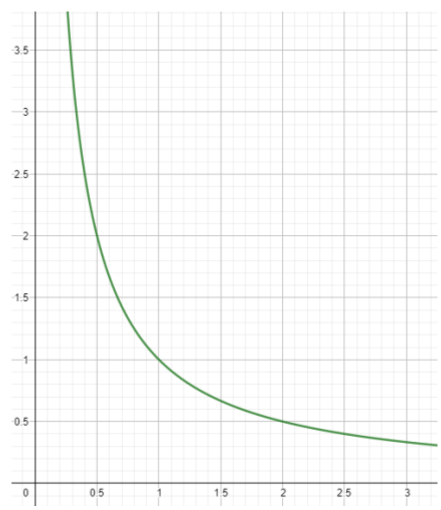
¿QUÉ RELACIÓN HAY ENTRE LA TANGENTE Y LA DERIVADA?

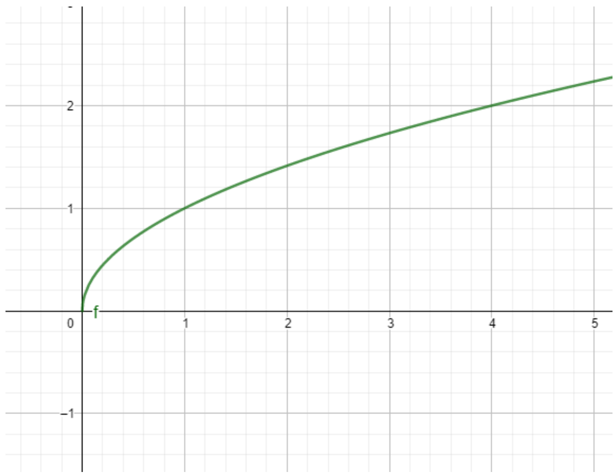
Se muestra a continuación los gráficos de cuatro funciones f, g, h, k, l. Todas son derivables en el lugar $x_0 = 1$.











a. Identifica los gráficos con sus funciones respectivas: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $k(x) = \frac{1}{x^2}$, $l(x) = \sqrt{x}$.

b. En los puntos F_0, G_0, H_0 y K_0 de las funciones, f, g, h y k, todos con la abscisa $x_0 = 1$, dibuja una recta que aproxime mejor la tangente en los puntos considerados y determina aproximadamente su pendiente.

c. Elabora la expresión algebraica de la pendiente de las secantes $\overline{F_0F}$, $\overline{G_0G}$, $\overline{H_0H}$, $\overline{K_0K}$ y $\overline{L_0L}$ en la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

d. Determina la pendiente de la tangente en $x_0 = 1$ como límite de la sucesión de las secantes $\lim_{h \to x_0} \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$.

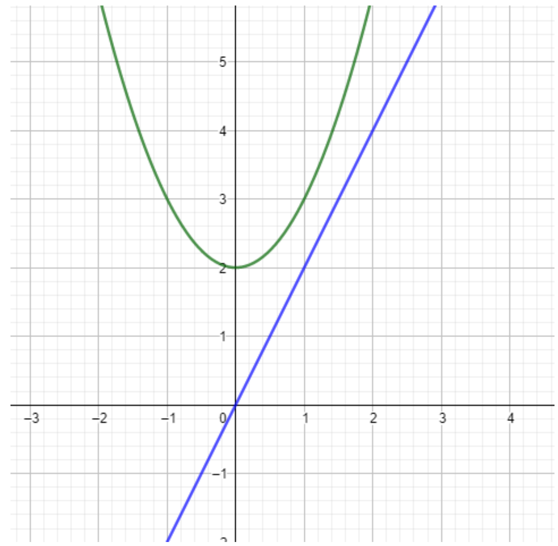
e. Relaciona la expresión $f'(x_0)$ llamada "derivada de f en x_0" con el límite calculado anteriormente.

f. Compara la derivada con la pendiente anteriormente estimada.

g. ¿Qué procedimiento matemático se puede aplicar para obtener la pendiente de la tangente?

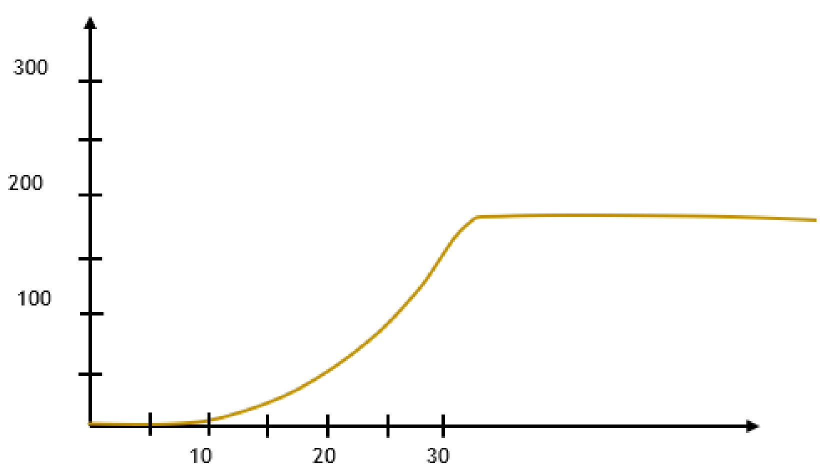
REPRESENTAR RECTAS TANGENTES CON LA NOCIÓN DE DERIVADA

1. Se considera la función cuadrática f, descrita por la ecuación $f(x) = x^2 + 2$, y una colección g_t de rectas que pasan por el origen $O(0,0)$ con la ecuación $g_t(x) = t \cdot x$ ($t \in \mathbb{R}$).
   a. Determina el parámetro t de manera que la recta tenga un solo punto común con el gráfico de f.
   b. Conjetura acerca de la cantidad de soluciones del problema.
   c. Mediante herramientas tecnológicas, resuelve gráficamente el problema.
   d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la derivada.
   e. Resuelve algebraicamente el problema mediante la elaboración de una ecuación cuadrática con el parámetro t, restringiendo las soluciones a una sola.



2. Un vehículo para explorar planetas tiene la capacidad de subir en cráteres de hasta una pendiente de 100%. Abajo se muestra el perfil del cráter de un planeta, que está representada aproximadamente por una función cuadrática f con $f(x) = \frac{1}{400}x^2$ en la cual la variable x representa metros.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA d, 3° y 4° medio



a. Verifica que el vehículo explorador no puede subir hasta la meseta que se extiende en la orilla del cráter.

b. ¿Hasta qué altura puede subir el vehículo explorador?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Según el contexto del curso, se puede generalizar la derivada para estas funciones, extendiendo el grado de los exponentes. En general, se debe considerar los puntos $F\left(x_o, f(x_o)\right)$, $G\left(x_o, g(x_o)\right)$, $H\left(x_o, h(x_o)\right)$, $K(x_0, k(x_0))$ y $L(x_0, l(x_0))$ y para cada punto determinar, para cada función, el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. De aquí se debe desarrollar la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$ para una función potencia f con $f(x) = x^m (m \in \mathbb{N})$, aplicando el "triángulo Pascal" y luego determinar $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. Con esto se verifica que la derivada $f´$ se expresa por $f´(x) = (m-1)x^{m-1}$.

2. Se sugiere realizar ejercicios sencillos de cálculo de límites de expresiones fraccionarias; por ejemplo:

con la forma $\lim_{h\to x_0} C(x_0 + h)$.

- $C(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ para x_0 = 1
- $C(x) = \frac{x^3+x^2}{2x+2}$ para x_0 = -1

con la forma $\lim_{x\to\infty} K(x)$

- $K(x) = \frac{2x^4+x^3}{x^3-1}$
- $K(x) = \frac{2x^2-8}{3x^3-12x}$

3. Para la última actividad, se debe considerar que la pendiente de 100% corresponde a un ángulo de 45°, $m = tg\ \alpha = 1$.

4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm

- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html

- Información sobre la interpretación geométrica de la derivada
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatio.com/interpretacion-geometrica-de-la-derivada-ejercicio-resuelto/

Actividad 3: Describiendo las derivadas como funciones de las tendencias de un cambio

PROPÓSITO

Los estudiantes aprovechan las herramientas disponibles para resolver problemas en el ámbito de la velocidad de un tren y de corredores, y una situación de costos de una empresa. Antes de esta aplicación, trabajan en un contexto puramente matemático donde se apoyan de representaciones y cálculos que pueden hacerse de forma manual o digital.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

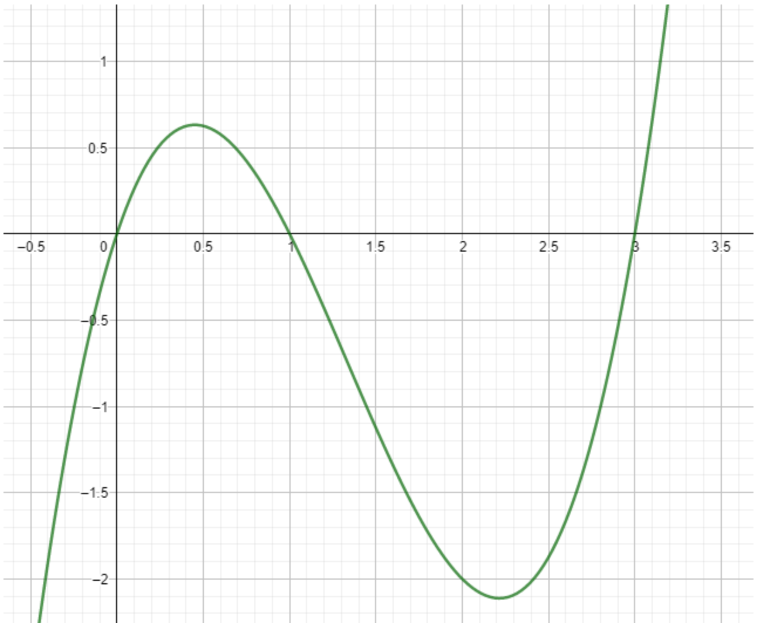
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN?

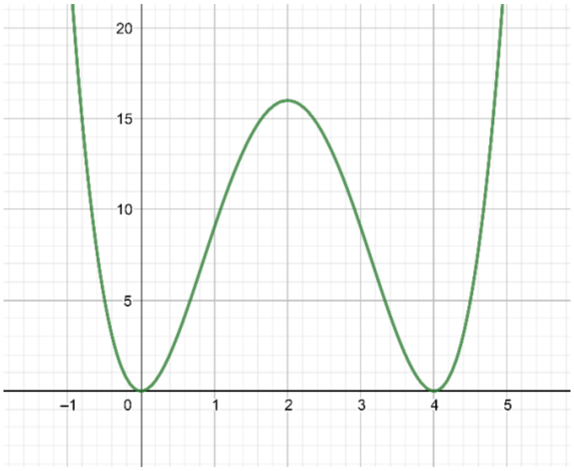
1. La imagen representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.



a. Considerando el gráfico, ¿cuáles son los “ceros” de la función f?
b. Determina algebraicamente los “ceros” de la función.
c. Considerando el gráfico, ¿en qué puntos x_1, x_2 aproximadamente hay puntos máximos o mínimos locales?
d. Determina la derivada f' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
e. Considerando los gráficos de f y f', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' en los lugares x_1, x_2?
f. Determina algebraicamente el lugar x_1 del máximo local y el lugar x_2 del mínimo local. Relaciona con el gráfico.
g. Considerando el gráfico de f, ¿en qué lugar x_3 aproximadamente hay un punto de inflexión?
h. Determina la segunda derivada f'' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
i. Considerando los gráficos de f' y f'', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' y la segunda derivada f'' en el lugar x_3?
j. Determina algebraicamente el lugar x_3 en el cual existe el punto de inflexión.
k. Verifica mediante la tercera derivada de f la existencia del punto de inflexión.

IDENTIFICACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE MÍNIMOS, MÁXIMOS Y DE INFLEXIÓN

1. En la imagen se representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$.
   Mirándolo, responde:



   a. ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje x? ¿Qué propiedad adicional tienen estos puntos?
   b. ¿En qué lugares x_1, x_2, y x_3 hay puntos extremos? ¿De qué tipo son?
   c. ¿En qué lugares x_4 y x_5 hay puntos de inflexión?
   d. Determina algebraicamente la primera, segunda y tercera derivada de f.
   e. Verifica algebraicamente la existencia y las coordenadas de los ceros, y de los puntos máximos, mínimos y de inflexión.
   f. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, representa los resultados de la actividad anterior mediante los gráficos de $f´$, $f´´$ y $f´´´$ en el mismo sistema de coordenadas.
   g. Describe el comportamiento de $f´$, $f´´$ y $f´´´$ en los puntos máximos, mínimos y de inflexión. Completa la tabla considerando además los cambios de $f´(x_i)$ y de $f´´(x_i)$ en x_i. Anota también el cambio de curvatura en los puntos de inflexión.

$f(x_i)$	Punto máximo	Punto mínimo	Punto de inflexión
$f´(x_i)$	0 y cambio: $(+) \rightarrow (-)$		---
$f´´(x_i)$			
$f´´´(x_i)$			

   h. Determina algebraicamente la ecuación de la tangente en los puntos de inflexión.

i. Aprovechando la simetría del gráfico de f, determina el punto de intersección entre las tangentes de los puntos de intersección.

j. Se considera una colección de funciones g_a con $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. ¿Para qué valor de a la función g_a coincide con la función f?

k. Determina el valor de a de tal manera que, en $x_0 = 0$, el gráfico de g_a tenga un punto de inflexión.

l. Represente el resultado de la actividad k, elaborando el gráfico de g_a mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

¿CUÁLES SON LAS LIMITACIONES DE UN MODELO MATEMÁTICO AL DESCRIBIR LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA?

1. Un tren de carga tiene una aceleración de aproximadamente $\frac{1}{10}\frac{m}{seg^2}$ que, en condiciones ideales, genera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado s con $s(t) = \frac{1}{20}t^2$, ($t \geq 0$).

(s = recorrido en metros y t = tiempo en segundos).

a. Elabora el gráfico de s mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

b. Elabora la fórmula de la función $s´$ que representa la velocidad instantánea del movimiento, y determina el instante t_0 en el cual el tren llega a la velocidad de $90\frac{km}{h}$.

c. ¿Por qué, en el movimiento real, el modelo matemático que describe la velocidad instantánea tiene limitaciones? Argumenta la respuesta.

d. Elabora un gráfico esquemático de la velocidad instantánea en el cual, a partir de un instante t_1, se considera que el modelo matemático no refleja la realidad.

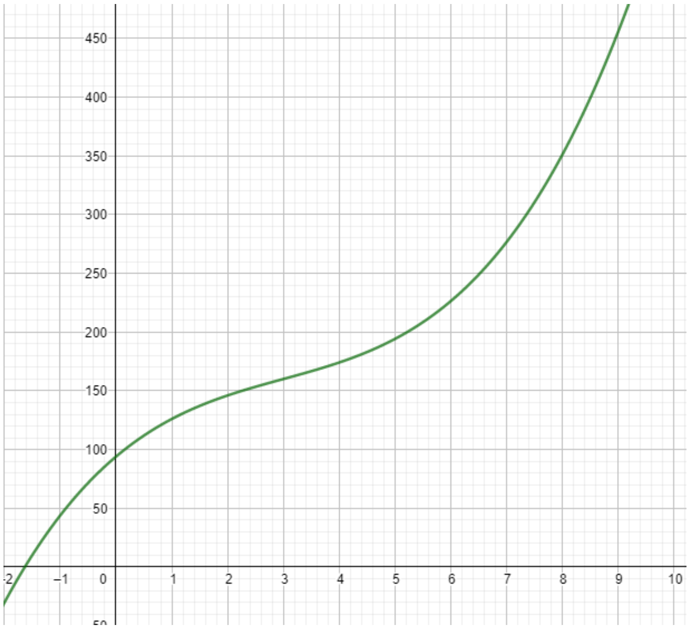
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

e. En este instante t_1, el gráfico ¿tiene un punto de inflexión? Argumenta y comunica la respuesta.

2. Un maestro de instalaciones de calefacción quiere empezar a instalar termopaneles para aumentar el rubro de su servicio. Una institución consultora para mini-pymes le hizo gratuitamente un estudio de los costos g que dependen de la cantidad de paneles semanalmente instalados. La función g de los costos se modela por la ecuación:

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94,$$

cuyo gráfico se muestra en el siguiente sistema de coordinadas. El eje X representa la cantidad de termopaneles instalados y el eje vertical representa los costos en miles de pesos.



a. Conjetura si la función g podría tener máximos o mínimos locales para valores de x que están fuera del intervalo mostrado.

b. Verifica o rechaza algebraicamente la conjetura anterior.

c. ¿Por qué la función no tiene sentido en la realidad para $x < 0$?

d. Si se considera la tendencia del aumento de los costos, ¿con qué función se describe esta tendencia?

e. Elabora la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

f. Con herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, grafica la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

g. Basado en el gráfico anterior, contesta: ¿en qué lugar x_0 se cambia la tendencia del aumento de los costos, y en qué dirección se realiza el cambio?

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

h. Determina algebraicamente, mediante la función $C(x)$ que describe la tendencia del aumento de los costos, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

i. Determina algebraicamente, mediante la noción de derivadas de la función g, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

j. ¿Cómo se llama el punto $C(x_0, f(x_0))$?

¿ES POSIBLE PREDECIR QUIÉN GANARÁ LA CARRERA DE ATLETISMO?

1. En un certamen regional de atletismo, los dos mejores atletas en la disciplina tienen los datos deportivos que muestra la siguiente tabla. Una carrera de 100m tiene dos fases: la primera es la aceleración hasta la velocidad máxima y la segunda implica un movimiento a velocidad constante con la velocidad máxima lograda en la fase de aceleración. En el modelo matemático, se supone que la aceleración también es constante.

   La fase de aceleración se modela con la función f con $f(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2$, en la cual $f(t)$ representa el recorrido f en el instante t a partir de la partida.

	Aceleración	Tiempo máximo de mantener la aceleración
Atleta A	$3\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3[s]
Atleta B	$2{,}8\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3,4[s]

   Con base en estos datos:

   a. Conjetura acerca del posible ganador de la carrera.
   b. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, elabora el gráfico de la función f para ambos alumnos.
   c. Determina gráficamente el posible ganador.
   d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la razón instantánea (velocidad instantánea) expresada por la tangente y la derivada de la función f.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para iniciar la actividad, se recomienda presentar los gráficos y dar instrucciones o preguntas como: ¿Dónde crees que hay un cambio? ¿Cómo se puede describir este cambio? ¿Qué ocurre con la tangente? También se debe hacer notar las situaciones extremas, los extremos locales y los puntos de inflexión.

2. Se sugiere indicar las unidades de medida; la aceleración en esta actividad está en la unidad de $\frac{m}{seg^2}$, lo cual implica que la velocidad se debe adaptar al sistema de metros y segundos. Normalmente, cuando se habla de vehículos, la velocidad está en kilómetros y horas.

3. Conviene hacer una especie de dictado con las características de una función para que los estudiantes grafiquen lo que están entendiendo. Algunas pueden ser: entre un punto máximo y un punto mínimo local hay un punto de inflexión; entre dos puntos máximos hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto máximo. Para evitar la derivación de un producto, se recomienda transformar de producto a suma.
4. Cabe notar que, en una de las tareas, se aplica la noción de derivadas de funciones en un contexto de economía. La función de los costos muestra tendencias que disminuyen, aunque los costos aumenten y muestra un punto de inflexión en los costos.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- La noción de derivada en el contexto de economía

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia

Actividad 4: Aplicando la derivada para detectar máximos y mínimos.

PROPÓSITO

Los estudiantes retoman desde el inicio el concepto de derivada, comenzando con un contexto de medición y velocidad, para luego continuar con la comprensión de la ley de Turgot y con problemas de aplicación en el ámbito de la extracción de minerales, costos e ingresos de una producción y procesos de fotosíntesis. Finalmente, retoman nuevamente la función compuesta y la derivada, en una aplicación relacionada con procesos de desagües y los costos de transporte del agua. En todas las aplicaciones, deben valorar y aprovechar las herramientas disponibles para resolver el problema, retomando y utilizando conceptos de actividades anteriores.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

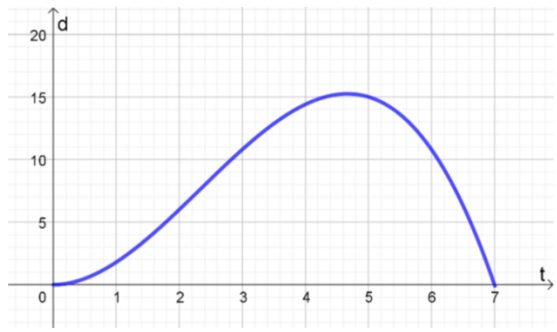
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿CÓMO INTERPRETAR LOS NIVELES DE CONTAMINACIÓN?

Desde su edificio central, un vehículo de monitoreo ambiental sale diariamente a recorrer la ciudad para medir niveles de contaminación atmosférica en dos rondas continuadas; la primera se extiende por siete horas. Para determinar la distancia p (medida en kilómetros) de la central a la que está el vehículo en todo instante t (medido en horas) durante su primera ronda, se ha encontrado que la distancia p puede modelarse por la función $p: [0,7] \to \mathbb{R}$, definida por
$p(t) = -0{,}3t^3 + 2{,}1t^2$.



La imagen muestra una gráfica de esta función.

a. Utiliza la función $p(t)$ para dibujar en el gráfico anterior la distancia de la central a la que estaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas y a las 6 horas; es decir, grafica los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$.
b. En el gráfico del enunciado, construye la recta que pasa por los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$ y determina la pendiente de esta recta.

Si en dos tiempos t_0 y t_1 se registran las respectivas ubicaciones $p(t_0)$ y $p(t_1)$ de un móvil, la rapidez media (v_m) de dicho móvil se define como la razón entre el desplazamiento que realiza $p(t_1) - p(t_0)$ y el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ que le toma dicho desplazamiento. Esto se escribe de la siguiente manera:

$$v_m = \frac{p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0} \mid [t_0, t_1]$$

c. Determina la distancia de la central a que estaba el vehículo de monitoreo a las 3 horas y a las 5 horas:

$p(3) =$ $p(5) =$

d. La rapidez media se interpreta como la rapidez que habría tenido un móvil si se hubiese movido con rapidez constante entre las t_0 y las t_1 horas durante su recorrido. Redacta la interpretación de la rapidez media del vehículo de monitoreo.
e. Con los datos anteriores, determina la rapidez media del vehículo de monitoreo de las 3 a las 5 horas:

$$v_m = \underline{\qquad\quad}$$

f. Compara el valor de v_m con el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que graficaste en ejercicio b, ¿son iguales o son distintos? De ser iguales, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos de su gráfica, con la noción de rapidez media.

g. Determina la rapidez media del vehículo de monitoreo en los siguientes intervalos de tiempo:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \dfrac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
3	5			
3,5	4,5			6
3,8	4,2			
3,9	4,1			
3,99	4,01			
3,999	4,001			

h. Como los intervalos de tiempo se van acortando cada vez más, conjetura el valor de la rapidez instantánea que llevaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas de su recorrido.

Para hallar la rapidez instantánea como una función derivada, se deja fijo el tiempo t_0 y el tiempo posterior t_1 se puede escribir como $t_1 = t_0 + h$, donde h es un valor positivo. Luego, interesa conocer la rapidez media entre t_0 y t_1 cuando t_1 tiende a t_0 o también, como la tendencia de $t_0 + h$ cuando h tiende a cero; o sea, el límite de la rapidez media cuando $h \to 0$, lo que se escribe

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

i. Utiliza esta última expresión para determinar una expresión algebraica para la rapidez instantánea en t_0 del vehículo de monitoreo, calculando el respectivo límite:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \dfrac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
t_0	$t_0 + h$			$\dfrac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

j. La expresión que hallaste es la expresión algebraica de la rapidez instantánea a partir de la función $p(t)$ de la distancia del móvil de monitoreo con su central, en el momento t. La expresión algebraica que hallaste es la función derivada (que se denota por $(d\,p(t))/dt$) de la función de distancia $p(t)$. Escribe la función derivada con la notación que usaremos:

$$\frac{d\,p(t)}{dt} =$$

k. Usando el resultado anterior, determina la rapidez instantánea del móvil de monitoreo a las siguientes horas (escribe los resultados en la unidad de medida correspondiente):

t (h)	0	1	2	3	4	$\frac{14}{3}$	5	6
$\frac{dp(t)}{dt}$ en $\frac{km}{h}$	$\frac{dp(0)}{dt} =$	$\frac{dp(1)}{dt} =$	$\frac{dp(2)}{dt} =$	$\frac{dp(3)}{dt} =$	$\frac{dp(4)}{dt} =$	$\frac{dp\left(\frac{14}{3}\right)}{dt} =$	$\frac{d\,p(5)}{dt} =$	$\frac{d\,p(6)}{dt} =$

l. Compara el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que pasa por $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$, con el valor de $\frac{dp(4)}{dt}$. ¿Son parecidos o son muy distintos? De ser parecidos, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos muy cercanos de su gráfica, con la noción de rapidez instantánea. Si la recta entre $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$ es secante a $p(t)$, cuando los puntos están infinitamente cercanos a 4, la recta se convierte en tangente en el punto $(4, p(4))$. En este caso, ¿a qué elemento de la recta tangente corresponde el valor $\frac{dp(4)}{dt}$ =?

m. Compara el valor de la rapidez media a las 4 horas de viaje del móvil que conjeturaste en d, con el valor de la rapidez instantánea a las mismas 4 horas de viaje del móvil ($\frac{dp(4)}{dt}$) que obtuviste ahora, y conjetura la relación que hay entre rapidez media y rapidez instantánea.

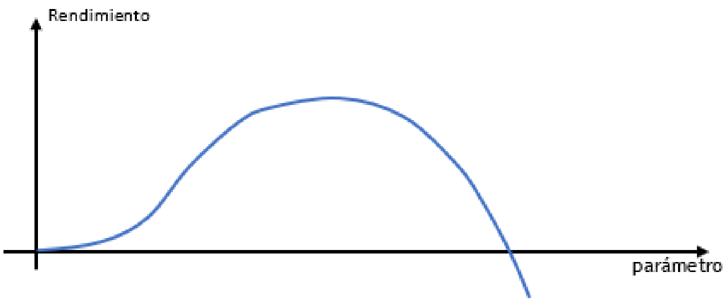
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

Utiliza lo estudiado para responder estas preguntas:

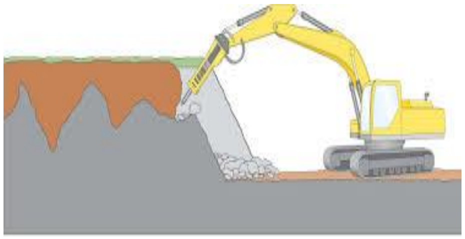
a. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 1$?
b. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 6$?
c. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = \frac{14}{3}$? (compárala con la rapidez instantánea en $t = 0$).
d. Observa que, a partir de cierto valor, las rapideces instantáneas cambian de positivas a negativas. Formula una hipótesis acerca de lo que indica este comportamiento.
e. ¿En qué intervalo de tiempo el móvil va disminuyendo su rapidez y en cuál va aumentado?
f. ¿Cómo se puede interpretar el signo positivo y el signo negativo en los valores de la derivada en este caso?

COMPRENDIENDO LA LEY DE TURGOT

El economista y político francés A.R.J. Turgot (1727 - 1781) encontró una ley que dice: Si aumenta y sigue aumentando un parámetro en la producción, mientras los demás parámetros queden invariantes, la producción inicialmente sube en su rendimiento, después disminuye su rendimiento y finalmente llega a resultados negativos. Un comportamiento similar se muestra en esta imagen.



a. Mediante herramientas tecnológicas digitales y utilizando deslizadores, diseña gráficos de polinomios de tercer grado para mostrar que pueden modelar un comportamiento similar a la "ley de Turgot".



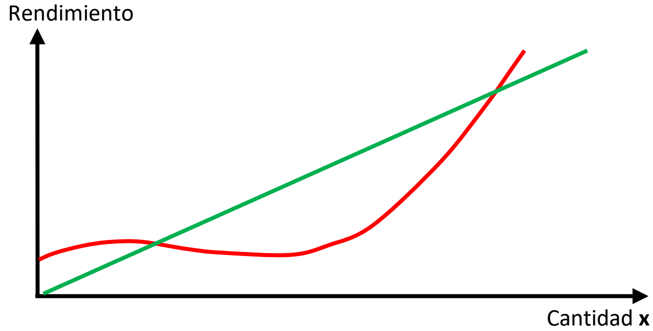
Una empresa minera está explotando un mineral. Los costos para la extracción se pueden modelar con una función C con $C(x) = 0{,}2x^3 - 4x^2 + 22x + 6$, en la cual x es la cantidad en toneladas del mineral diariamente extraído y C son los gastos en la unidad de 1 millón de pesos. Los ingresos I de la venta del mineral por tonelada, también en la unidad de 1 millón de pesos, siguen la función lineal $I(x) = 10x$.

a. Elabora la ecuación de la función G que representa las ganancias.
b. Confecciona el gráfico de la función de las ganancias G en el intervalo de toneladas de $[0;\ 18]$ y determina aproximadamente, en el gráfico, la cantidad extraída para la cual se genera un mínimo y un máximo de las ganancias G.
c. Verifica algebraicamente con la noción de derivadas, las cantidades x_1 y x_2 para las cuales se genera un mínimo y un máximo de las ganancias.
d. Confecciona el gráfico de la derivada de $G´$ de G y verifica la coincidencia entre las actividades anteriores.
e. Por una sobreoferta y debido a otros indicadores económicos en el mercado internacional, los ingresos por tonelada bajan a 3 millones de pesos. Determina gráficamente el intervalo de extracción en el cual se genera ganancias.

IDENTIFICANDO GRÁFICAMENTE COSTOS, INGRESOS Y GANANCIAS

En el gráfico, la variable y representa los costos y los ingresos de una producción. Los jóvenes deben contestar las preguntas y razonarlas.

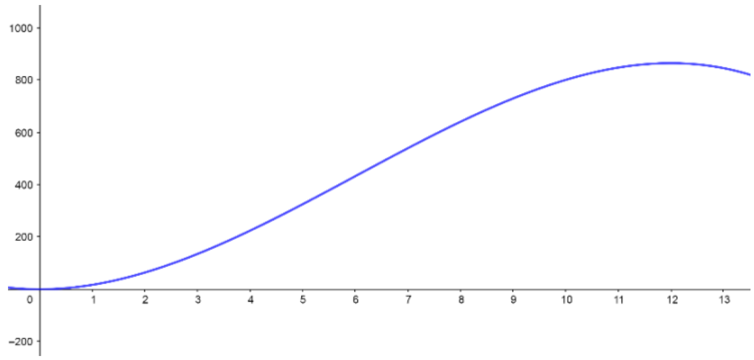
- ¿Cuál de los gráficos representa los costos y cuál los ingresos?
- ¿Hay costos fijos?
- ¿Dónde hay máximos, mínimos e inflexión? Marcar los puntos.
- ¿En qué intervalo hay ganancias en la producción? Marcar el intervalo en el eje X.



INTERPRETANDO GRÁFICAMENTE LA FOTOSÍNTESIS

La fotosíntesis se genera en las hojas de las plantas y su producto es oxígeno, uno de los elementos fundamentales para la vida. En la imagen se muestra el gráfico de una función que modela aproximadamente la producción diaria de oxígeno de un árbol.

- La función representa un polinomio de tercer f grado con la ecuación $f(t) = at^3 + bt^2$.
- La función f representa el volumen total del oxígeno producido en litros hasta la hora indicada.
- La variable t representa el tiempo en horas que han pasado desde la salida del sol.



a. Determina los parámetros a y b con la siguiente información:
   - En el instante $t = 6$ horas después de la salida del sol, se han acumulado 540 litros de oxígeno producido.
   - En el mismo instante se empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido.

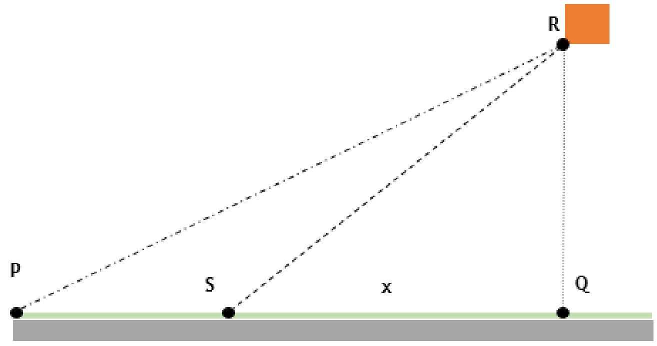
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

b. Con los resultados de la actividad anterior y utilizando herramientas tecnológicas digitales, elabora el gráfico de la función f.

c. Determina algebraicamente el punto máximo de la función f.

DERIVANDO UNA COMPUESTA EN UN CONTEXTO DE DESAGÜES

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecte una casa rural a un servicio del agua y desagüe ya existente, que está lejos de la casa. El dibujo esquemático muestra la ubicación de la casa, cuyo terreno se extiende hacia una calle vecinal dibujada por la franja gris.



El servicio existente de agua y desagüe llega hasta el punto P, al lado de una calle que sigue en dirección Q. La casa R tiene la distancia $\overline{QR}$ más corta de la calle de 300m. El segmento $\overline{PQ}$ tiene el largo de $500\ m$. Debido a la situación geológica del suelo, los costos estimados por metro corriente de la nueva conexión directamente al lado de la calle son de 3UF, y por el terreno hacia la casa son de 6UF. Como la empresa quiere maximizar las ganancias, se modela la conexión determinando el punto S al lado de la calle, en el cual se debe iniciar la bifurcación del conducto hacia la casa rural.

a. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado directo $\overline{PR}$.

b. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PQ}$ u $\overline{QR}$.

c. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 450m$.

d. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 350m$.

e. Elabora la ecuación de la función C, que modela los costos de la conexión a la casa en dependencia de x.

f. Determina la derivada C' de la función C, aplicando la regla de la función compuesta.

g. Determina el valor de x_{min} para el cual los costos lleguen a un mínimo.

h. Conjetura acerca de la condición bajo la cual la conexión directa $\overline{PR}$ del conducto sea la más barata. Argumenta y comunica la conjetura.

i. Si los costos en la construcción del conducto a través del terreno aumentan más y más en comparación con los costos al lado de la calle, ¿en qué dirección se mueve el lugar x_{min} en el dibujo esquemático que determina el punto S de la bifurcación? Explica y argumenta sin realizar cálculos.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para la verificación algebraica, es importante que los alumnos resuelvan ecuaciones hasta el cuarto grado, aplicando la factorización de una suma con potencias para obtener un producto de dos expresiones algebraicas potenciales con el exponente 2 como el de mayor grado. Así se reducen las ecuaciones a ecuaciones cuadráticas. Este proceso no debe hacerse necesariamente de forma manual, hay que dar la posibilidad de elegir entre cálculos manuales y digitales.

2. Se sugiere motivar a los estudiantes para que ellos mismos encuentren la ecuación de la función de las ganancias a partir de los costos y de los ingresos. Se pueden apoyar en el gráfico y considerar valores de una situación real, modelando la curva y guiándose por la ley de Turgot.

3. Se recomienda hacer el gráfico para visualizar la situación en todos los casos de aplicación. Antes de determinar algebraicamente las derivadas de $\boldsymbol{G'}$ y $\boldsymbol{G''}$, también es importante que ubiquen en el gráfico de $\boldsymbol{G}$ los puntos extremos y de inflexión. Esto les permite detectar errores en los cálculos y les ayuda a explicar los resultados de forma visual y algebraica.

4. Para que recuerden la función compuesta, se sugiere que, al iniciar la actividad, elaboren gráficos de una función cuadrada compuesta con una función lineal y que calculen la derivada de una función compuesta.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
    - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
    - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm
- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html
- Artículo sobre las derivadas en economía
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia
- Derivada de la función compuesta
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_3.htm
- Método para derivar la raíz cuadrada de x
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikihow.com/derivar-la-ra%C3%ADz-cuadrada-de-X
- Información sobre máximos, mínimos y puntos de silla
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points

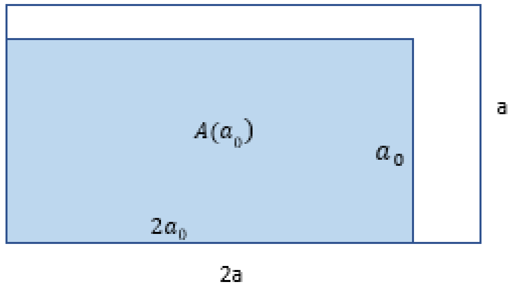
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.	• Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio. • Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio. • Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones. • Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas. • Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión. • Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

Duración: 12 horas pedagógicas.

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas donde el estudiante trabaje de forma personal por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el estudiante puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

1. Para valores de $a > 0$, la función A representa el cambio del área A de un rectángulo en dependencia del lado a. El ancho del rectángulo se representa por a y el largo es el doble del ancho.



   a. Elabora la expresión algebraica $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ de la razón del cambio del área del rectángulo considerado.

   b. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \rightarrow a_0)$ $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ del cambio de A para $a_0 = 2$

   (Si no se logra determinar el resultado, seguir con $\frac{2a^2-8}{a-2}$)

a	1	1,5	1,9	1,99	2	2,01	2,1	2,5	3
$\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$					¿?				

2. Se considera la función f con $f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ para } x \geq 1 \\ -x+1 \text{ para } x < 1 \end{cases}$

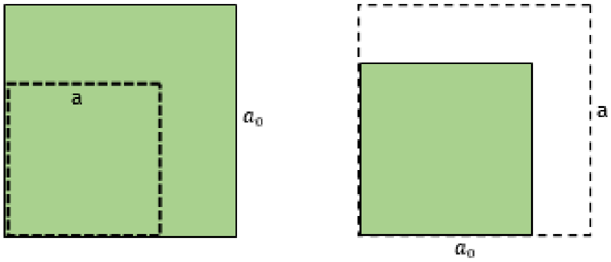
   a. Dibuja el gráfico de f.

   b. Conjetura acerca de la razón instantánea en el lugar $x_0 = 1$.

   c. Verifica la conjetura mediante procedimiento simbólico.

Relacionar la rapidez instantánea del cambio con el cambio mismo

3. Para valores de $a > 0$, la función $A(a) = a^2$ representa el cambio del área A de un cuadrado en dependencia del lado a.

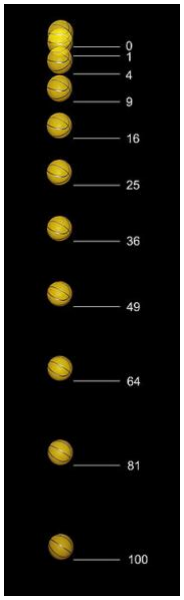


a. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \to a_0)$ $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)} = \frac{a^2-25}{a-5}$ cambio de A para $a_0 = 5$.

A	4	4,5	4,9	4,99	5	5,01	5,1	5,5	6
$\frac{a^2-25}{a-5}$					¿??				

b. Verifica la conjetura mediante la derivada $A´(5)$ del cambio del área del cuadrado.
c. ¿Qué significado geométrico tiene esta razón instantánea?

4. En la foto estroboscópica, se observa la caída “casi” libre de una pelota de basquetbol. Al inicio de la caída, las velocidades no son muy altas y se puede despreciar la resistencia del aire.



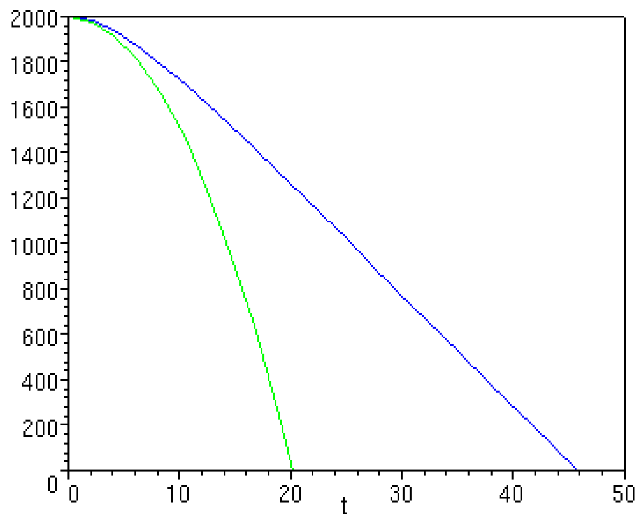
La función f que modela el desplazamiento de un cuerpo versus el tiempo durante una caída libre es una función cuadrática del tiempo:

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

$$f(t) = h - at^2$$

- h es la altura desde la cual cae un cuerpo.
- t representa el tiempo en segundos.
- $a = \frac{g}{2}$ donde g es la constante de gravedad 9,81 y que puede ser considerada con su valor aproximado $g \cong 10$ y por lo tanto se puede considerar $a \cong 5$.

La imagen representa los gráficos de un cuerpo que cae desde una altura de $2\,000\ m$. La línea verde representa una caída libre y la azul representa la caída del mismo cuerpo, considerando la resistencia del aire.



Curva verde: caída libre, curva azul: caída con resistencia del aire

a. Según el gráfico de la caída libre, la altura inicial es $2\,000m$ y en el instante $x = 20s$ es $0m$. Determina la ecuación de la función que representa la caída libre.
b. Determina la rapidez instantánea del cuerpo en el instante $x_0 = 10$, bajo el supuesto de la "caída libre", aplicando la derivada f' de la función f.
c. Determina, mediante el gráfico azul, las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[20,30]$ y $[30,40]$. La función se denomina con la letra r.
d. Considerando los resultados de c, ¿qué se puede concluir? Explica la respuesta.
e. Determina la ecuación de una función g cuyo gráfico también es parábola con el mismo vértice $S(0;\ 2\,000)$, pero con el intercepto $B(46;\ 0)$ con el eje X.
f. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, dibuja ambas parábolas, compáralas con el gráfico azul y conjetura acerca de la validez de ambas funciones para modelar la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.
g. Con los datos del gráfico azul, elabora un gráfico esquemático que represente la rapidez instantánea de la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.

Modelamiento de una situación del ámbito de la economía

5. La editorial de una revista técnica tiene $25\ 000$ lectores y por cada lector gana anualmente $\$4\ 000$. El directorio decide aumentar las ganancias totales. Para modelar esta situación, se puede considerar dos medidas en la venta de su producto.

   Primero: reducir las ganancias anuales por lector y atraer simultáneamente más lectores. Segundo: subir las ganancias anuales por lector y tomar en cuenta una pérdida de lectores.

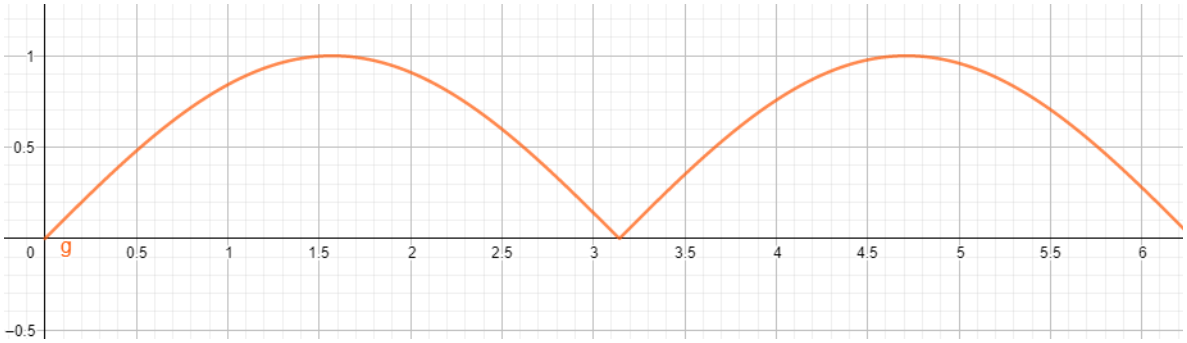
   a. ¿Por qué la primera medida podría ser la más adecuada? Justifica tu respuesta, utilizando valores de una tabla y la ley de Turgot.
   b. Reducir las ganancias por lector significa una pérdida y, por otra parte, que aumenten los lectores, aunque con base en una ganancia menor. ¿Dirías que esto va en dirección opuesta? ¿Qué se puede concluir para la meta de la editorial?
   c. Se asigna a la ganancia total de la empresa la variable f, a la ganancia por lector la variable g y al número de los clientes la variable c. Elabora en general la ecuación que representa la relación entre f, g y c.
   d. Considera los datos iniciales y supón un aumento en 100 lectores, si se rebaja la ganancia por lector en \$1 000; sobre esa base, elabora la ecuación de la función que modela la situación. La variable x representa \$1 000.
      (Resultado intermedio $f(x) = 1\ 000\ 000 + 15\ 000x - 1\ 000\ 000\mathrm{x}^2$).
   e. Dibuja el gráfico y establece gráficamente la rebaja x_0 para la cual se logra una ganancia máxima total. Determina esta ganancia total.
   f. Determina la derivada $f´$ de la función f para encontrar máximos o mínimos e interpreta según el problema.

Para la tarea "Modelamiento de una situación del ámbito de la economía", puedes usar la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar los dos casos iniciales del problema.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar uno de los dos casos.	Elabora una tabla con valores que corresponden a otra situación.
Utilizan la Ley de Turgot para justificar fenómenos de la economía.	Basado en los valores de la tabla junto con la Ley de Turgot, argumenta para justificar sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una sola justificación sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una justificación que es independiente de la Ley de Turgot o de la tabla de valores.
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante una composición de funciones.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante operaciones diferentes a la composición de funciones.	Describe verbalmente la relación de las variables, sin utilizar una operación matemática.
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión utilizando la derivada de funciones.	Relaciona la derivada con los conceptos de máximo o mínimo de la función.	Determina la derivada de la función.	Aplica procedimientos con la función que son distintos del cálculo de la derivada.
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.	Interpreta la derivada y los valores encontrados según el contexto del problema presentado.	Interpreta la derivada y los valores encontrados respecto de algunas partes del contexto del problema.	Interpreta la derivada y los valores encontrados con información que está fuera del contexto.

Conjeturar acerca de la existencia de la razón instantánea de un cambio como límite de pendientes de secantes

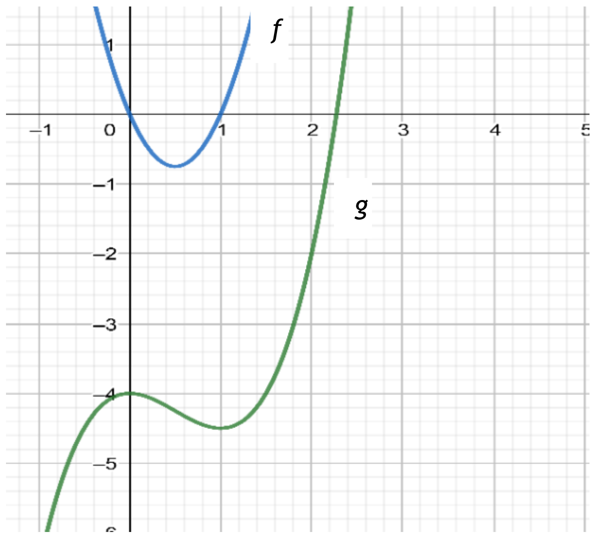
6. Se considera la función f definida por $f\ (x)\ =\ |sen\ x|$, como muestra el gráfico:



a. Mediante el gráfico, determina aproximadamente la razón media del cambio en los intervalos $[2{,}5, \pi]$, $[3, \pi]$, $[\pi, 3{,}3]$, $[\pi, 3{,}78]$.
b. Conjetura acerca de si existe una razón instantánea en el punto $S(\pi, f\,(\pi))$.
c. Elabora la ecuación de la función f sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
d. Elabora la ecuación de la función f' sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
e. Realiza el siguiente procedimiento para límites: $\lim_{h \to 0} f'(\pi - h)$ y $\lim_{h \to 0} f'(\pi + h)$. Con el resultado, verifica o rechaza la conjetura de la actividad b.
f. Dibuja el gráfico de la derivada f' y comenta el comportamiento de f' en el lugar x_0 = π.

Relacionar funciones con sus derivadas.

7. La imagen muestra el gráfico de dos funciones f y g, una de las cuales es derivada de la otra.
   a. Conjetura: ¿Cuál de las funciones es la derivada de la otra?
   b. Argumenta tu decisión con al menos 4 propiedades entre f y g.



8. Completa la tabla con las informaciones relacionadas entre función y su derivada.

	Ordenada de un punto en el gráfico de f	Recorrido de un movimiento en el instante x	Crecimiento de una magnitud en el instante x	El volumen de una esfera con el radio x	El trabajo físico desde el inicio hasta el desplazamiento x
$f(x)$					
$f`(x)$					

9. Con base en la tabla, elabora en forma esquemática el gráfico de la función g.

$g(x)$	aumentando	aumentando	aumentando	constante	disminuyendo	disminuyendo
$g'(x)$	aumentando	constante	disminuyendo	¿?	disminuyendo	constante

Responde:

a. ¿Cuántas veces se puede derivar una función potencia con exponentes positivos hasta que la derivada no se cambia? Explica la respuesta.

b. Determina pendientes de tangentes en el gráfico de funciones en un punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

10. Se considera una parábola con la ecuación $f(x) = ax^2 + b$. La parábola tiene el punto $P(2; 5)$, y la pendiente de la tangente en el punto $Q(2;\ f(2))$ es $m = 1$.

a. Elabora la ecuación de la parábola.

b. Grafica la parábola en un sistema de coordenadas.

11. Un polinomio de tercer grado tiene la ecuación de $f(x) = x^3 - tx^2 + 1$.

a. Desafío**:** Determina el valor del parámetro t de manera que la tangente en el punto de inflexión pase por el origen $O(0; 0)$ del sistema cartesiano de coordenadas (resultado parcial para seguir con la actividad: $t = 3$).

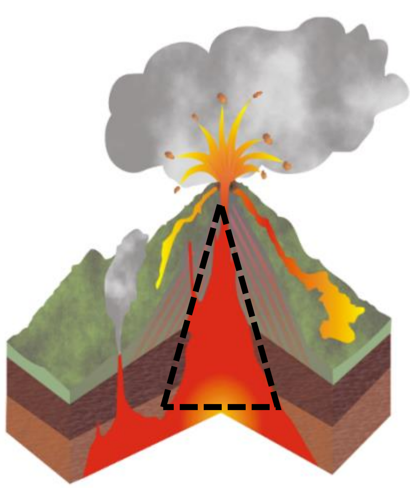
b. Establece los puntos máximos, mínimos y de inflexión para el gráfico de f.

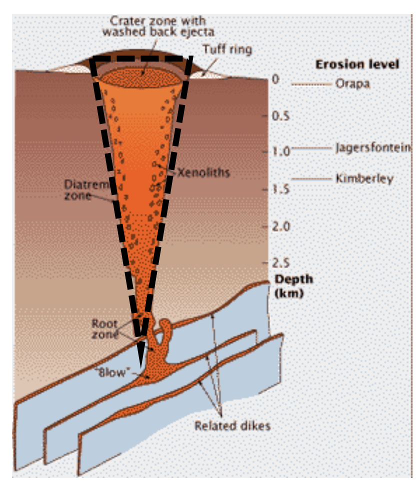
c. Dibuja el gráfico de f sobre el intervalo de $[-3{,}5;\ 1]$

d. Con el valor de $t = 3$, elabora la ecuación de la tangente en el punto de inflexión y verifica que la tangente es una recta que pasa por el origen $O(0; 0)$.

Concepto de la derivada como función que representa la razón instantánea de cambio

12. Las "chimeneas de lava" de los volcanes pueden tener diferentes formas –como tubos, conos o conos invertidos–, dependiendo de las formaciones geológicas.





a. Si se llenan las chimeneas con un caudal constante de lava, ¿cuál de los siguientes gráficos representa la altura de la columna de lava en la chimenea, en dependencia del tiempo? Razona la respuesta.

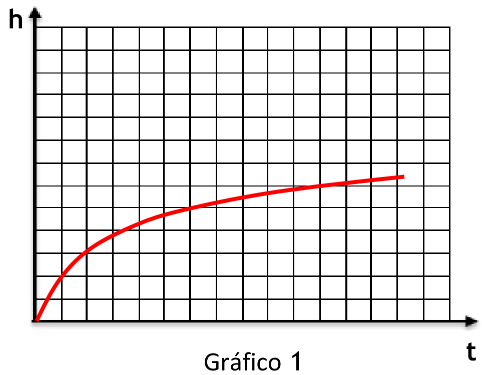
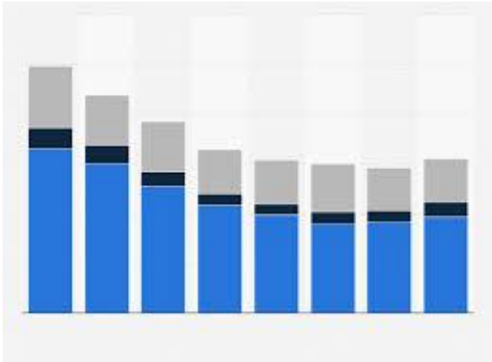


Gráfico 1

Gráfico 2

b. Determina para el volcán tipo "Kimberley" (cuya chimenea parece un cono invertido), la ecuación de la función que representa la altura h en dependencia del tiempo t, si se considera un caudal constante de la lava afluente. Los datos de la "chimenea de lava" son:
Altura total de la chimenea: $H = 2km$, radio máximo $R = \frac{1}{16} H$ y caudal constante de la lava afluente en unidad u de tiempo $V = 1\,000 \frac{m^3}{u}$.
c. Elabora el gráfico de la función h.
d. Determina la ecuación de la función h', que representa la razón instantánea del cambio de la altura de lava en la chimenea.
e. Determina la razón instantánea del cambio de la altura en el momento de llegar a la altura H.

Determinar valores extremos e inflexión en contextos de economía



13. El volumen V de ventas del año pasado de una empresa grande del rubro de energía, se puede representar aproximadamente por la siguiente función:

$$V(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 - 200$$

a. La variable x representa el tiempo en meses y los valores numéricos se entregan en miles de millones, es decir multiplicados por $1 000 000 000.
b. Confecciona el gráfico con herramientas digitales como GeoGebra.
c. Determina gráficamente en qué meses el volumen de ventas está máximo o mínimo, o en cuáles cambia la tendencia de las ventas.
d. Establece algebraicamente, mediante la noción de derivada, los meses con máxima o mínima venta o de cambio de tendencia, y contrástalos con las soluciones gráficas.
e. Si el volumen de ventas siguiese igual, ¿se podría contar con más extremos o cambios de tendencia? Argumenta matemáticamente y comunica la respuesta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Elaboran expresiones algebraicas, utilizando la noción de razón de cambio en situaciones geométricas, científicas y económicas.			
Conjeturan sobre la razón instantánea del cambio en un punto.			
Verifican de forma algebraica la razón instantánea en un punto, basándose en los límites laterales.			
Explican el significado de la razón instantánea para contextos geométricos.			
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.			
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.			
Elaboran modelos, considerando condiciones iniciales diferentes.			
Comparan modelos y eligen el más adecuado para la situación dada.			
Representan la derivada como límites de pendiente de secantes.			
Conjeturan sobre la derivada de una función, utilizando las características de ambas.			
Describen una función y su derivada según sus características de comportamiento.			
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión, utilizando la derivada de funciones.			
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.			