# Unidad 2: Reconocer un patrón infinito y la noción de límite

## Propósito de la unidad

Los estudiantes utilizan sus conocimientos de regularidades y patrones en esta unidad, para acercarse de manera intuitiva a la noción de límite. Trabajan con sucesiones naturales para generalizar al caso real e incluir en su vocabulario los términos de continuidad, convergencia y divergencia. Asimismo, trabajan el límite desde contextos geométricos, ordenamientos y situaciones concretas que han sido modificadas para generar las nociones básicas de este concepto. Las preguntas que pueden ayudar a orientar a la unidad son: ¿Cómo se describe las situaciones que tienen un límite? ¿Cómo describir la noción de límite desde lo intuitivo a lo matemático?

## Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.**
Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

# Actividad 1: Representando el límite de sucesiones en contextos geométricos

## PROPÓSITO

Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

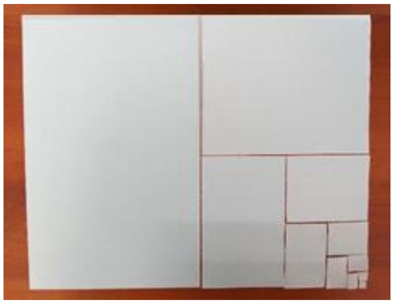
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

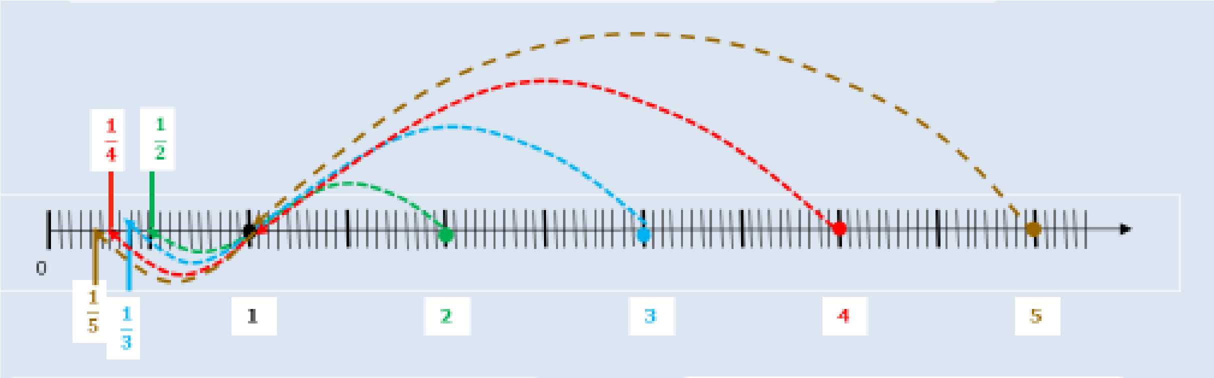
## COMPRENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



   a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
   b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
   c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el “último elemento” de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
   d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el “último elemento” de la sucesión.
   e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
   f. ¿Qué relación puedes ver entre “sin alcanzar”, el “infinito” y los números naturales?
   g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
   h. ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
   i. ¿Qué ocurre con el “último elemento” en este caso?

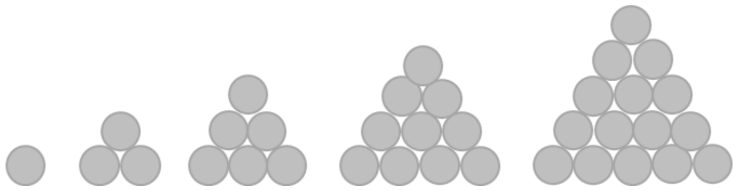
2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.




   a. ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?
   b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que modela esta transformación.

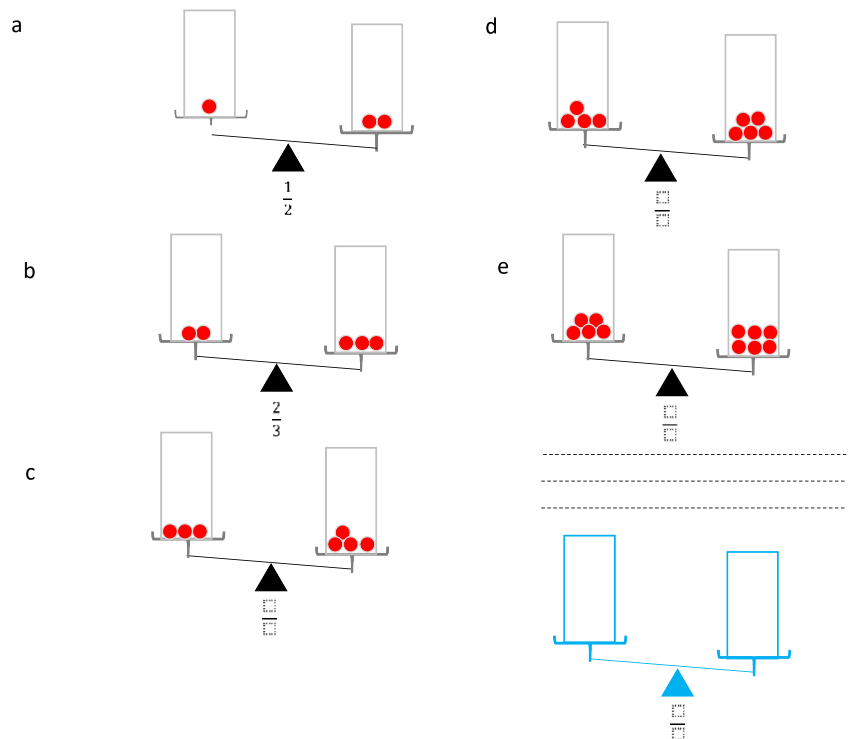
c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?
d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

3. La imagen muestra cinco “pilas” de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
b. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.
c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar “el último valor”.

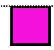
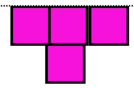
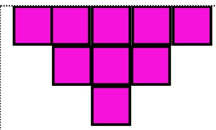
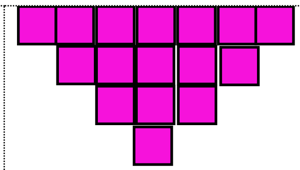
4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.




a. Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.
b. Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.
c. ¿Cuál podría ser el término n-ésimo? Escribe la fracción de la balanza en enésima posición dibujada en azul.
d. ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?
e. ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?
f. Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibrio en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.
g. Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?
h. Elabora el término general de la nueva sucesión.
i. ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?
j. ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.
k. Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 2 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos de cursos anteriores. Algunos de los ejercicios pueden ser:
   - Encuentra el patrón del siguiente arreglo de figuras geométricas y completa la tabla.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Figura |  |  |  |  | |
| Cantidad de cuadrados | 1 | | | | |
| Descripción verbal de las figuras:<br>Fórmula: | | | | | |

   - Grafica la siguiente función de números naturales $f(n) = 2n + 1$ y encuentra un arreglo geométrico que defina el mismo patrón.
   - ¿Cuáles son las características de un patrón? ¿Cuáles son sus diferencias o similitudes con una función?
2. Se recomienda considerar las nociones básicas del límite como: i) la aproximación de los valores de la sucesión hacia un valor fijo; ii) a partir de un cierto valor de la sucesión y para cada entorno cada vez más pequeño alrededor del límite, todos los términos de la sucesión se encuentran dentro del entorno. Se debe especificar nuevamente estas nociones en el caso de las funciones para denotar el caso del límite de la función en un punto.

3. Para comenzar con la noción de límite, conviene considerar solo las sucesiones y graficarlas en un plano de coordenadas para visualizar el comportamiento que tienen. En estos casos, cabe hablar de la noción de tendencia de la sucesión, para luego poder hablar de la tendencia de una función.

4. Si fuera pertinente y necesario, se podría trabajar la sucesión presentada en 2 al final de esta actividad, o para retomar como introducción a las funciones en la actividad 4. Esta sucesión tiene término general $\frac{1}{n}$ y puede retomarse para presentar el paso desde los números naturales a los números reales con la función real $f(x) = \frac{1}{x}$. Se puede trabajar comenzando con los números decimales mayores a 1 y ver lo que ocurre en el gráfico.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Video introductorio a la noción de límite
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/v/introduction-to-limits-hd

- Estimación de valores de límites a partir de gráficas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/e/two-sided-limits-from-graphs

- Límite que tiende a infinito
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/eXtSCdQn

# Actividad 2: Comprendiendo la paradoja de Zenón

## PROPÓSITO

Los estudiantes argumentan sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie. La pregunta que orienta la actividad es si será posible que Aquiles alcance a la tortuga. Para contestar y extender una situación infinitamente en el tiempo, elaboran tablas y modelan la situación a fin de conjeturar y dar respuestas. Se espera que piensen con perseverancia y que identifiquen proactivamente aquellos conceptos sobre el límite que les permiten responder a la situación planteada.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

## AQUILES Y LA TORTUGA

1. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: La paradoja del filósofo griego Zenón de Elea (490-430 a. Cr.) cuenta “la carrera de Aquiles con la tortuga”, en la cual se conjetura acerca de la posibilidad de dividir una distancia física real del espacio en infinitas partes, y de la posibilidad de dividir un lapso real de tiempo en infinitas partes.

Conexión interdisciplinaria:
**Filosofía.**
OA a, 3° y 4° medio.

   a. ¿Qué es una paradoja? Busca definiciones en el internet con tu compañero y contrasten esta definición con ejemplos de paradojas.
   b. Construyan paradojas propias en contextos diversos, como la vida, el tiempo, la filosofía, la matemática, las ciencias u otras áreas.
   c. Investiguen sobre otras paradojas famosas de la historia.

2. Investiguen en internet y redacten un resumen de 200 palabras como máximo, para compartir en clases sobre:
   a. La biografía de Zenón de Elea.
   b. La noción del “infinito” en la historia de la humanidad (cultura, religión, arte, ciencias naturales u otras áreas de interés).
   c. El término “infinito” en la historia de la matemática.

3. Basados en los resúmenes, discutan los siguientes puntos:
   a. Las consecuencias que tendría para el flujo de tiempo, una serie de intervalos de tiempo que sucesivamente se acercan a 0.
   b. La contradicción en la paradoja de Zenón.
   c. Situaciones paradójicas matemáticas en las cuales se incluye el infinito.

## COMPRENDER LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

1. Se considera las siguientes condiciones de la carrera:

   - La tortuga parte con 100m de adelanto.
   - La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante.
   - Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó $\frac{1}{10}$ del recorrido de Aquiles.

     Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10m, la tortuga ya avanzó otra vez $\frac{1}{10}$ del último recorrido de Aquiles.
   - Este proceso se repite iterada e infinitamente.

   a. Reconociendo las condiciones anteriores de la carrera, conjetura si Aquiles puede alcanzar a la tortuga o no. Si estimas que no puede alcanzarla, explícalo a tu compañero.

   b. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las distancias entre la tortuga y Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera. Conjetura acerca del límite de la sucesión de los anchos de los intervalos de tiempo.

| Intervalo de tiempo en s | 10 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1\,000}$ | $\frac{1}{10\,000}$ | $\frac{1}{100\,000}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia entre ellos al final del intervalo de tiempo en m | 10 | | | | | | |

   c. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las posiciones absolutas de la tortuga y de Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera, y en referencia al punto de partida de Aquiles.

| Intervalo de tiempo en s | 10 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1\,000}$ | $\frac{1}{10\,000}$ | $\frac{1}{100\,000}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición de la tortuga al final del intervalo de tiempo en m | 110 | | | | | | |
| Posición de Aquiles al final del intervalo de tiempo en m | 100 | | | | | | |

d. Conjetura acerca de la siguiente estrategia: "El tiempo puede avanzar en unidades que se disminuyen en un porcentaje de la unidad anterior, paso por paso, y así no puede sobrepasar un cierto lapso".

e. Estima las siguientes magnitudes, bajo el supuesto de que el proceso de acercamiento se repite iteradamente:
   - Tiempo total
   - Recorrido total de la tortuga
   - Recorrido total de Aquiles
   - Distancia entre la tortuga y Aquiles

f. ¿Cómo se escribe el tiempo total de la corrida en forma decimal?

g. ¿Cómo se representa el tiempo de la corrida en forma de una fracción?

2. Traspaso de la situación de intervalos discretos de tiempo al modelo continuo del tiempo.

   a. Con las condiciones de la carrera, determina cada elemento de las funciones del desplazamiento:

      Tortuga *T:* $X_T(t) = v_T \cdot t + X_0$

      Aquiles *A*: $X_A = v_A \cdot t$

      $v_T$: velocidad de la tortuga

      $v_{A:}$ velocidad de Aquiles

   b. Elabora los gráficos esquemáticos del desplazamiento de la actividad anterior. (Eje horizontal $t$, eje vertical desplazamiento *X(t)*, $X_0$ adelanto de la tortuga, $\tau$ tiempo en el momento del alcance).

   c. Determina gráficamente el tiempo que pasa hasta que Aquiles alcance a la tortuga.

   d. Determina gráficamente el recorrido de Aquiles y de la tortuga cuando Aquiles alcanza a la tortuga.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, 3° y 4° medio.

## LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Consideren la siguiente tabla de sucesión de los intervalos de tiempo que pasan desde la partida.

| Número $n$ del intervalo de tiempo | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Intervalo de tiempo en $s$ | 10 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1\,000}$ | $\frac{1}{10\,000}$ | $\frac{1}{100\,000}$ |

a. Desarrollen la expresión algebraica de los intervalos de tiempos con potencias de base "10": $t_n = 10^n$

b. Calculen la suma de los primeros 8 tiempos de la actividad anterior y represéntenla como número decimal.

c. Suponiendo que haya infinitos intervalos de tiempo construidos mediante la expresión de la actividad b, y recordando la transformación de números decimales periódicos, ¿con que fracción se puede expresar el número decimal que representa la suma de los tiempos $t_n$?

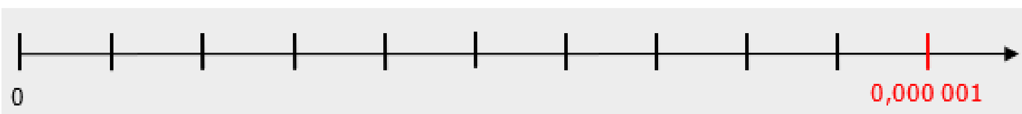
d. Representando la suma de los intervalos de tiempos como serie, ¿por qué es una serie geométrica?

e. Expresen la serie 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + … como serie geométrica con los términos $t_1$ y $q$.

f. Determinen el límite de la serie.

g. En un sistema de coordenadas, elaboren un gráfico que representa discretamente el recorrido de Aquiles según el tiempo, basándose en los tiempos: 10s; 11s; 11,1s; 11,11s;… Expliquen el tipo del gráfico que resulta.

h. Se considera la sucesión $(a_n)$ con $a_n = \frac{1}{n}$ y una "carrera" en la recta numérica, haciendo "saltos" de un término de la sucesión hasta el próximo término. Suponiendo que haya avanzado con un millón de saltos hasta el término $a_{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$, ¿se puede decir que "ahora faltan menos saltos hasta el límite 0 que al inicio de la carrera"? Argumenten y comuniquen la respuesta a un compañero.




## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda iniciar la actividad individual con el cuento de la corrida entre Aquiles y la tortuga, y motivar a los estudiantes a que argumenten matemática y prácticamente si es o no posible que Aquiles alcance a la tortuga.

2. En la estimación intuitiva del límite, se les puede recordar cómo convertir las fracciones en números decimales periódicos y viceversa, para trabajar con números que les sean más familiares. También se puede transformar, paso a paso, una adición de fracciones decimales en números decimales periódicos y viceversa, como:

$$S_6 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \ldots, S_6 = 10 + 1 + 0{,}1 + \cdots$$

3. Para resolver el problema mediante gráficos de funciones lineales afines, los alumnos deben saber que, en el modelo de Zenón, se considera posiciones relativas entre Aquiles y la tortuga, mientras en este modelo se contempla el desplazamiento absoluto de Aquiles y de la tortuga en dependencia del tiempo corriente.

4. Se sugiere elaborar la expresión con números de una serie geométrica infinita, luego escribir su expresión algebraica y de ahí determinar su límite para $n \to \infty$.
5. Con base en este límite, los alumnos determinan los límites de los recorridos de Aquiles y de la tortuga. En el gráfico, los puntos se enfilan en una línea recta cuya "pendiente" es el factor 10, que es el inverso multiplicativo del factor q de la serie geométrica.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones o series.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- El problema de Aquiles y la tortuga

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://demostracionpy.wordpress.com/2015/02/14/aquiles-y-la-tortuga/
- Matemática e historia

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/HISTORIA/historia_Zenon.htm

  La paradoja de Aquiles
- https://www.curriculumnacional.cl/link/http://cienciacomonunca.blogspot.com/2014/08/resolviendo-la-paradoja-de-aquiles-y-la.html

# Actividad 3: Argumentando con la noción de límites en diferentes contextos

## PROPÓSITO

Los estudiantes piensan con perseverancia para desarrollar el concepto de límite de sucesiones y series numéricas. Elaboran proactivamente representaciones de ellas en la recta numérica y el sistema de coordenadas para proyectar y conjeturar hacia el infinito. Además, se espera que expliquen pictóricamente lo que significa el límite; que transfieran la representación pictórica al nivel simbólico, que planteen una conjetura acerca de un posible límite y la confirmen o rechacen con el cálculo de límite.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

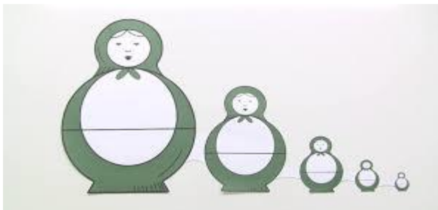
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

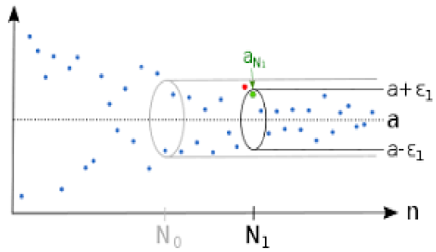
**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

## COMPRENDIENDO EL CONCEPTO DE LÍMITE

1. Observa y describe las dos imágenes a tu compañero.



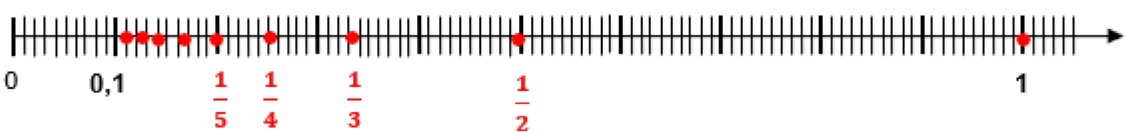



   a. ¿Qué piensas que quieren decir estas imágenes?
   b. ¿Cómo las puedes relacionar con la palabra "límite"?
   c. ¿Cómo se vinculan con "sucesión" o "serie"?
   d. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: "Para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño que sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon". ¿Qué imagen corresponde mejor al párrafo? Explica cada elemento a tu compañero.

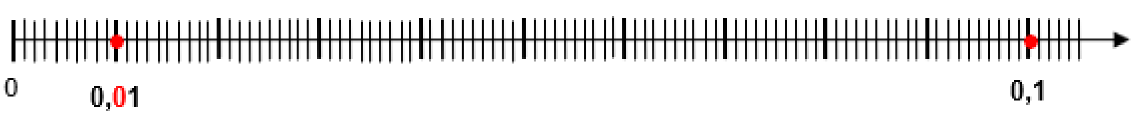
## ¿QUÉ ENTENDEMOS POR CONVERGENCIA?

1. La imagen muestra números de una sucesión marcados con puntos rojos en el segmento de la recta numérica entre 0 y 1.

   a. Los números se acercan al número 0,1, disminuyendo la diferencia entre dos términos seguidos. ¿Por qué el número 0,1 no puede ser el límite de la sucesión? Encuentra la expresión general de la sucesión.



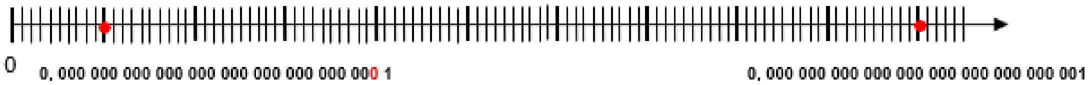

   b. Se considera el segmento entre 0,1 y 0. ¿Cuál es la posición $n_0$ de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda?




$n_0 =$

c. A continuación, se representa más aumentos de la recta numérica. Determina la posición $n_0$ de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda.


$n_0=$




$n_0=$

d. Si se sigue observando los números $\frac{1}{n}$ con una "lupa imaginaria" con más y más aumentos, llegando a más posiciones $n_o$, contesta las siguientes preguntas y explica las respuestas de forma verbal.

i. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \leq n_0\}$?

ii. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \geq n_0\}$?

iii. Los números representados por $a_n = \frac{1}{n}$, ¿pueden disminuir a números negativos?

iv. ¿Por qué el número 0 es límite de la sucesión?

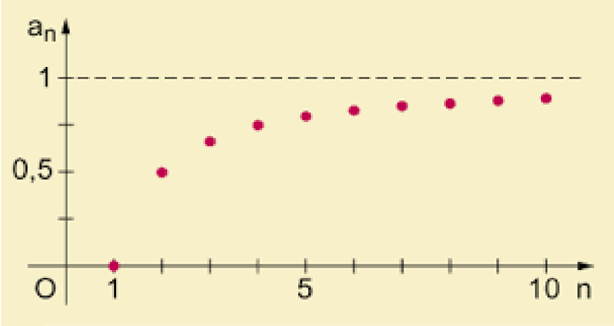
v. Llegando los puntos a cada posición $n_0$ nueva y desplazando hacia "0", ¿quedan menos números a recorrer?

e. Se considera un "intervalo $\varepsilon$" alrededor del límite 0 "$[\,0 - \varepsilon\,, 0\; + \;\varepsilon\,]$" y se elige un valor de $\varepsilon = 0{,}0000000005$. ¿A partir de qué número $n_0$ todos los términos $a_n$ están dentro de $[\,0 - \varepsilon\,, 0\; + \;\varepsilon\,]$?

f. Verifica que, para cada ε > 0 y muy cercano a 0, ocurre la misma situación: a partir de un cierto $n_0$ todos los términos $a_n$ están en el intervalo $[0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon]$.

g. Verifica que para un "límite falso", por ejemplo "$\frac{1}{100}$", no ocurra la situación.

2. La imagen muestra un gráfico de puntos que representa una sucesión $(b_n)$.




   a. Determina el término general $b_n$.

   b. Conjetura acerca del límite de la sucesión.

   c. Determina algebraicamente $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3. Determina algebraicamente el límite de la sucesión $(a_n)$ con $a_n = \frac{2-3n^2}{(2n+1)^2}$.

4. Elaboración de sucesiones a partir de un límite dado.

   a. Elabora el término general de una sucesión con expresión fraccionara $(c_n)$ que tiene el límite $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2}$

   b. Elabora un término general de una sucesión con expresión fraccionara $(d_n)$ que no tenga límite.

## ¿CÓMO CALCULAR $\sqrt{2}$ ?

1. El gráfico de más adelante muestra una sucesión de cinco fichas rectangulares de 12 cm$^2$ de área cada uno. Las fichas tienen un vértice común y están apiladas en una mesa, de tal manera que la ficha con el mayor largo esté más abajo.

   a. A partir de dicho gráfico, elabora con tus compañeros de grupo una tabla que muestre los valores posibles de los lados de los rectángulos.

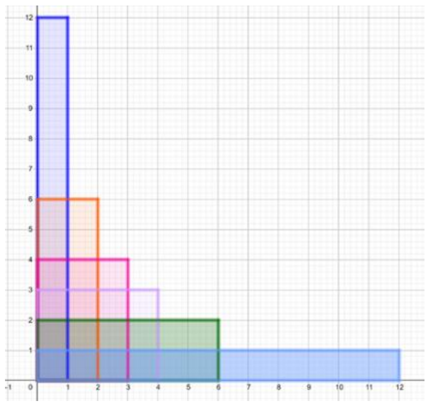
   b. Dibujen un gráfico de puntos de los vértices superiores derechos de cada rectángulo.

   c. Determinen la ecuación de la sucesión que representa la altura $a_n$ de los rectángulos.

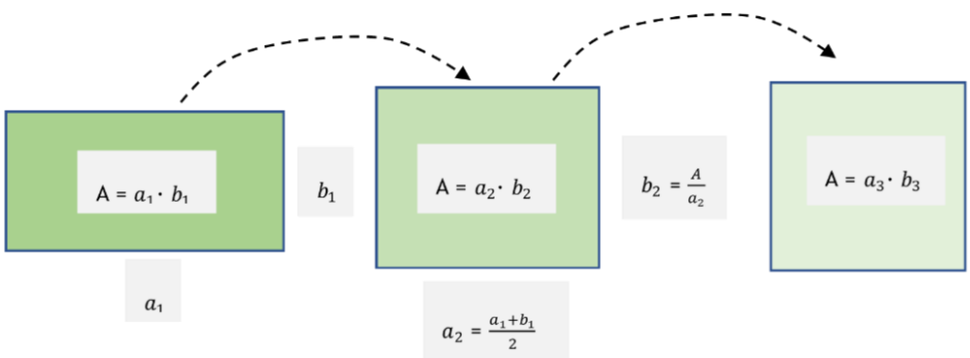
   d. Determinen el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   e. Tomando en cuenta el área de cada rectángulo, ¿qué número puede resultar para la expresión "$\infty \cdot 0$"?

f. Conjeturen acerca de la pregunta: ¿Hay más números que podrían resultar de la expresión $A = r^2$? Verifiquen la conjetura con ejemplos.



2. El siguiente esquema muestra el proceso de elaborar una sucesión infinita con la cual se puede determinar la raíz cuadrada irracional de un número racional “A”, cuya representación pictórica es transformar un rectángulo en un cuadrado. El matemático y filósofo Herón de Alejandría (10 d.C. – 70 d.C.) creó este método para calcular aproximadamente raíces cuadradas.




Así se explica el esquema: “Se transforma la ecuación cuadrática $x^2 = 2$, que tiene $\sqrt{2}$ como una de las soluciones en la ecuación $x = \frac{2}{x}$. Empezando con valor inicial $x_1$, se determina la cota inferior y la cota superior de los intervalos en los cuales siempre se encuentra $\sqrt{2}$; estas cotas determinan nuestro primer intervalo. Con la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + \acute{x}_n}{2}$ ,$n \in \mathbb{N}$ se elabora nuevos intervalos, denominados encaje de intervalos, ya que se van poniendo uno dentro del otro y tienen como centro $\sqrt{2}$”.

a. Explica a tu compañero lo que entendiste de esta explicación. Elaboren juntos un ejemplo.

b. ¿Cuál es la premisa para que la ecuación $x^2 = 2$ se pueda transformar en la ecuación $x = \frac{2}{x}$ y por qué se cumple?

c. Ahora consideren el valor inicial $x_1 = 2$ (superior a $\sqrt{2}$ y primera cota superior del intervalo) y sigan con la ecuación: $x = \frac{2}{x}$, resultando el término $x_1{}' = \frac{2}{2} = 1$ (inferior a $\sqrt{2}$ y primera cota inferior del intervalo). Determinen los primeros 6 intervalos del encaje de intervalos mediante la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$. Completen la tabla, calculando fracciones en vez de números decimales y utilizando una calculadora.

| N | Cota inferior/superior $x_n$ | Cota superior/inferior $x_n' = \frac{2}{x_n}$ | Promedio entre $x_n$ y $x_n'$ $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 2$ | $x_1' = \frac{2}{2} = 1$ | $x_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ |
| 2 | $x_2 = \frac{3}{2}$ | $x_2' = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ | $x_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{21}{12}$ |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

d. Comparen el valor aproximado con el valor aproximado que expresa la calculadora.

e. ¿Con qué valor inicial $x_1$, los siguientes pasos de aproximación a $\sqrt{2}$ son iguales a comenzar con $x_1 = 2$? Argumenten y comuniquen la respuesta, mostrando un ejemplo a su compañero.

f. ¿Se puede aplicar el procedimiento de Herón para todos los números reales? Prueben de forma sistemática, comuniquen la respuesta a dos compañeros, al menos, y argumenten en 3 frases como máximo.

## ¿CUÁNDO NO EXISTE EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN?

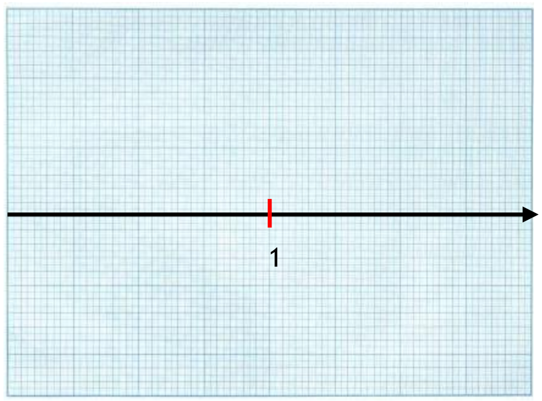
1. Determina algebraicamente el límite de las sucesiones o argumenta la inexistencia de las siguientes sucesiones.

   a. $(a_n)$ con $a_n = \frac{(2n+1)^2}{1-3n^2}$.

   b. $(b_n)$ con $b_n = \frac{(3n-1)^2}{3n-1}$.

2. Se considera la sucesión $(c_n)$ con $c_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$.

   a. Marca los primeros 8 elementos en la recta numérica.




   b. Conjetura acerca de la existencia del límite de $(c_n)$

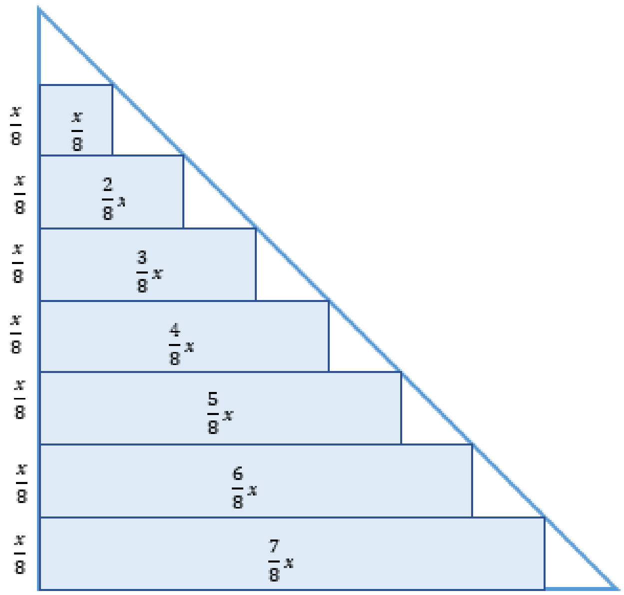
   c. Verifica la conjetura, determinando $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ y considerando números pares e impares.

   d. Si la ecuación de la sucesión se cambia a $d_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$, ¿qué efecto tiene el cambio? Argumenta la respuesta.

Se sugiere abordar la siguiente actividad en forma grupal.

## CALCULANDO ÁREAS MEDIANTE LA NOCIÓN DE LÍMITES

1. La imagen muestra un triángulo rectángulo isósceles de catetos $x$ (el grande). Expliquen qué entienden de la imagen. Redacten una pregunta y describan cómo la noción de límite les podría ayudar a responderla.




Respondan dentro del grupo lo siguiente:

a. ¿Cuál es la expresión algebraica del área de este triángulo?
b. La imagen muestra una aproximación inferior mediante rectángulos del ancho $\frac{x}{8}$. Determinen la suma de todos los rectángulos y comparen con la expresión del área del triángulo.
c. ¿Qué porcentaje del área total se ha alcanzado con esta aproximación inferior de la subdivisión de la altura en $\frac{x}{8}$?
d. Con herramientas tecnológicas digitales, determinen aproximaciones hasta alcanzar el 90% del área total.
e. ¿Qué aproximación será una subdivisión en $\frac{x}{10}$?
f. Desarrollen una expresión algebraica para una aproximación inferior del triángulo en rectángulos del ancho $\frac{x}{n}$. (Notar que $A_n = \frac{x^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 3 \cdot \frac{x^2}{n^2}$ + ... + (n-1) $\cdot \frac{x^2}{n^2}$).
g. Factoricen la expresión $A_n$ lo más posible.
h. Considerando la fórmula de la suma de los primeros $n$ números naturales $\sum_1^n k$= $\frac{n(n+1)}{2}$ , desarrollen la expresión algebraica de los primeros $(n-1)$ números naturales.
i. Determinen el límite $\lim_{n-\infty} A_n$ y comparen con la expresión algebraica del triángulo elaborada en a.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Una forma diferente de acercarse a esta actividad es iniciarla con una “carrera de puntos” hacia el “infinito”, llegando a los “hitos” como “0,1”, “0,01”, “0,000 000 000 01”, “0,000 000 000 000 000 000 001” y “0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 1”. Para obtener una imaginación intuitiva de que es imposible acercarse verdaderamente con los términos al límite, los estudiantes deben calcular la cantidad de términos que quedan atrás del “hito” alcanzado, y conjeturar acerca de las posiciones de la sucesión que “faltan” para el límite.
2. Para entender el “intervalo $\varepsilon$” alrededor de un límite, es importante que comprendan que una inecuación de la forma “$n \leq n_0$” tiene finitas soluciones y para “$n > n_0$”, todos los números naturales mayores que $n_0$ forman el conjunto solución. Hay que motivar a los estudiantes a explicar la noción de límite en lenguaje natural: que para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño como sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon.
3. Se sugiere darles constantemente la posibilidad de conjeturar y averiguar sobre convenciones para el significado de las expresiones que involucran el infinito como “$\infty \cdot 0$”, las cuales son indeterminadas y no representan un término algebraico. La representación gráfica hace entendible, mediante la proporcionalidad inversa, que hay posibilidades indeterminadas de representar “$\infty \cdot 0$” como número.
4. Cabe notar que en esta actividad se muestra una sucesión cuyo límite es el número real de $\sqrt{2}$, la cual incluye una sucesión infinita de intervalos encajonados cuyo número interior es $\sqrt{2}$. Se sugiere invitar a los jóvenes a averiguar sobre este método y que prueben hacer cálculos que superen el uso de la calculadora.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Algoritmo de Herón de Alejandría para calcular la raíz cuadrada de un número
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://actividadesinfor.webcindario.com/algoritmo1.htm

- Biografía de Herón de Alejandría, su fórmula y método
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.matesfacil.com/matematicos/Heron/Heron-de-Alejandria-formula-area-triangulo-metodo-aproximar-raiz-cuadrada-demostracion.html

- Propuesta para calcular la raíz cuadrada, usando el método de cuadrar rectángulos
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://docplayer.es/21463319-Propuesta-para-el-calculo-de-la-raiz-cuadrada.html

# Actividad 4: Argumentado la existencia de límites de funciones reales

## PROPÓSITO

Los estudiantes se aproximan a las nociones de lo infinitesimal y lo infinitamente grande. Ambos infinitos se pueden hallar en los números reales, que son la base de las actividades que se propone. Piensan con perseverancia para entender cómo se comportan las imágenes de una función cuando los elementos del dominio se aproximan infinitesimalmente a un número escogido. Trabajan proactivamente elaborando tablas, gráficos y cálculos para describir cómo los elementos del dominio tienden al infinito positivo o negativo, y cómo esta aproximación los lleva a los términos de convergencia o divergencia de la función.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

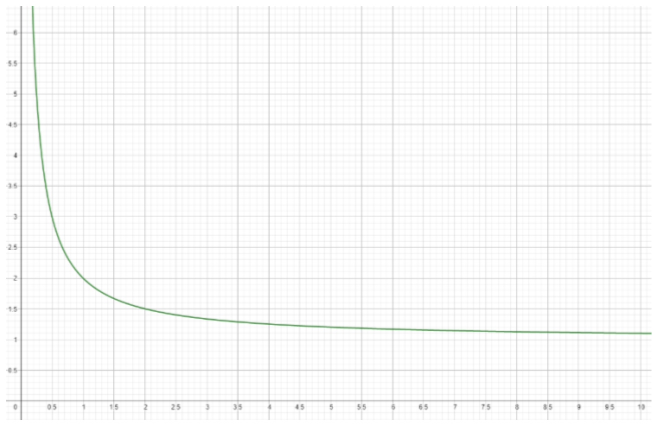
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

## ¿CUÁNDO EXISTE EL LÍMITE DE FUNCIONES?

1. La imagen muestra el gráfico parcial de una función real $f$ con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que es la suma de una función constante $k$ con $k(x) = 1$ y la función $g$ con $g(x) = \frac{1}{x}$.



   a. Avanzando en el eje $X$, es decir, cuando $x \to \infty$, ¿a qué número tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta desde el gráfico.

   b. La función $f$ es la suma de las funciones $k$ y $g$. Si se considera el avance $x \to \infty$, ¿a qué valor tienden $k(x)$ y $g(x)$? Explica la respuesta utilizando el gráfico.

   c. ¿Cuál es la ecuación de la recta al cual se acerca infinitamente el gráfico de $f$? Grafica esta recta en el mismo plano cartesiano donde se encuentra $f$.

   d. ¿Observas alguna similitud entre esta gráfica y la realizada en la actividad anterior?

   e. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿existe un número al cual tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta a un compañero, utilizando el gráfico.

   f. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿a qué recta se acerca infinitamente el gráfico de $f$? Argumenta y explica la respuesta.

2. Si se tiene una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interesa saber qué sucede cuando $x$ se acerca infinitesimalmente a un valor específico. Estudia esto, usando las tablas y gráficos de las funciones siguientes:

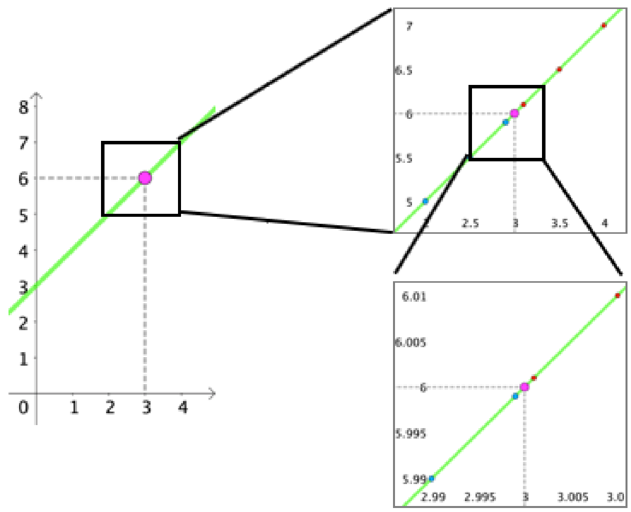
   a. Función afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por la expresión $f(x) = x + 3$. Observa cómo se comportan los valores de $f(x)$ cuando $x$ se acerca a 3 por la derecha (valores mayores que 3, pero muy cercanos a 3) en la primera tabla y cuando $x$ se acerca a 3 por la izquierda (valores menores que 3 pero muy cercanos a 3) en la segunda tabla. Completa las tablas:

Tabla

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | $f(2) = \ +3 = 5$ |
| 2,5 | $f(\ \ ) = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$ |
| 2,9 | $f(2{,}9) = 2{,}9 + \ = 5{,}9$ |
| 2,99 | $f(2{,}99) = 2{,}99 + 3 =$ |
| | $f(2{,}999) = 5{,}999$ |
| | $f(2{,}99999) =$ |
| | $f(\ \ ) = 5{,}9999999$ |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 4 | $f(4) = +3 = 7$ |
| 3,5 | $f(\ \ ) = 3{,}5 + 3 = 6{,}5$ |
| 3,1 | $f(3{,}1) = 3{,}1 + \ = 6{,}1$ |
| 3,01 | $f(3{,}01) = 3{,}01 + 3 =$ |
| | $f(3{,}001) = 6{,}001$ |
| | $f(3{,}00001) =$ |
| | $f(\ \ ) = 6{,}0000001$ |

Gráfico




b. Observa el esquema de la derecha y explica la relación entre el esquema y los valores de las tablas.

c. Lee con tu compañero la siguiente explicación del profesor: “Si en ambos casos, cuando $x$ se acerca a 3 (por la izquierda o por la derecha), el valor de $f(x)$ se acerca a 6, entonces se puede escribir:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6\text{”}.$$

¿Por qué piensas que es así? Conversa con tu compañero y lleguen a una conclusión conjunta. Nota: la expresión $\lim_{x \to 3}(x+3) = 6$ se lee “el límite de la función $x + 3$, cuando $x$ tiende a 3, es 6” o bien “el límite de $f(x)$ es 6 cuando $x$ se acerca infinitesimalmente a 3 por la derecha y por la izquierda”.

d. Estudia a qué valor tiende $f(x) = x^2$ cuando $x$ tiende a 2, completando las siguientes tablas:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $f(1) = 1^2 =$ |
| 1,5 | $f(1{,}5) = 1{,}5^2 =$ |
| 1,9 | $f(1{,}9) = 1{,}9^2 =$ |
| 1,99 | $f(1{,}99) = 1{,}99^2 =$ |
| 1,999 | $f(1{,}999) =$ |
| 1,99999 | $f(1{,}99999) =$ |
| 1,99999999 | $f(1{,}9999999) =$ |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3 | $f(3) = 3^2 =$ |
| 2,5 | $f(2{,}5) = 2{,}5^2 =$ |
| 2,1 | $f(2{,}1) = 3{,}1^2 =$ |
| 2,01 | $f(2{,}01) = 3{,}01^2 =$ |
| 2,001 | $f(2{,}001) =$ |
| 2,00001 | $f(2{,}00001) =$ |
| 3,0000001 | $f(2{,}0000001) =$ |

e. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x$ tiende a 2? Escribe tu hallazgo como el límite de una función:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

3. Considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x$ tiende a $-1$. Usaremos la notación $x \to -1^+$ para indicar que $x$ tiende a $-1$ por la derecha, y $x \to -1^-$ para indicar que $x$ tiende a $-1$ por la izquierda.

   a. Completa la tabla, usando una calculadora u otra herramienta apropiada para realizar los cálculos.

<table>
<tr><td>$x \to (-1)^-$</td><td>$-2$</td><td>$-1{,}1$</td><td>$-1{,}01$</td><td>$-1{,}001$</td><td>…</td><td colspan="2">$-1$</td><td>…</td><td>$-0{,}999$</td><td>$-0{,}99$</td><td>$-0{,}9$</td><td>$0$</td><td>$(-1)^+ \leftarrow x$</td></tr>
<tr><td>$f(x) \to$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>…</td><td>___</td><td>___</td><td>…</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\leftarrow f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Aproximación a $-1$ por la izquierda ($x \to -1^-$) $\to$</td><td colspan="2">=</td><td colspan="6">$\leftarrow$ Aproximación a $-1$ por la derecha ($x \to -1^+$)</td></tr>
</table>

   b. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^+$? ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^-$?

   c. Si en ambos casos se obtiene el mismo resultado, entonces es posible escribir el resultado:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2} = \_\_\_\_\_\_$$

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Comúnmente se utiliza un lenguaje ambiguo para hablar de límite; por ejemplo, al decir la función "tiende al límite", se puede pensar que hay puntos que nunca tomarán ese valor y, si la función es continua en ese punto, el límite de la función en él es precisamente el valor de la función en ese punto.

2. Se puede considerar como “límite” un valor al cual la sucesión se acerca para valores muy grandes de $n$. La noción de límite es local y en la gráfica se puede decir que, por más pequeños que consideremos una vecindad de $x$, los valores de la sucesión no “tocarán” este límite. En el caso de una sucesión, se puede decir que se acerca al límite sin tocarlo. Además, tiene que explicarles que un “límite” siempre debe ser un número y que el infinito no es un número. En esta etapa, conviene utilizar los términos de convergencia y divergencia de sucesiones.

3. Al final de esta actividad, y para relacionar la sucesión de las balanzas presentada en la actividad 1, se sugiere graficar la función $\frac{x+1}{x}$ para analizar lo que ocurre cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se propone utilizar una tabla Excel para dar valores de *x* muy grandes o pequeños (negativos), para que los jóvenes observen que la función tiende a 1, cuando $x$ tiende tanto al infinito positivo como al infinito negativo. Se recomienda también hacer notar la diferencia entre qué significa que la gráfica de la curva no sobrepase la recta y =1 y la noción de límite. Cabe notar que la función toma valores mayores a 1 para valores de $x$ positivos menores a 1, situación que se puede utilizar para enfatizar que, en el caso del límite, se debe especificar la tendencia de los valores de $x$.

4. Según el contexto del curso, se puede avanzar al cálculo de límites de funciones reales e introducir la notación simbólica para describir lo que ocurre con la función y sus límites, por ejemplo:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim_{x\to-\infty} f(x)$, para indicar que los límites laterales son diferentes.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \nexists$, para indicar que no existe el límite de la función.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Volumen de un cono, applet
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/g8QE7eHc

- Una definición de límite de una función
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Límite_de_una_función

- Teoría y práctica con límites
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm3a.html

## Actividad de evaluación

| Objetivos de Aprendizaje | Indicadores de evaluación |
|---|---|
| **OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.<br>**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.<br>**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación. | • Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.<br>• Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.<br>• Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.<br>• Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.<br>• Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites. |

**Duración:** 12 horas pedagógicas

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas donde el estudiante trabaje de forma personal por dos semanas y elija cuáles de estos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajadas durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

1. Considera la sucesión $(a_n)$ con $a_n = \frac{10}{n}$.
   a. Determina los 15 primeros términos y representa gráficamente la sucesión.
   b. ¿Es una sucesión convergente o divergente?
   c. Si fuese convergente, determina a qué tiende o converge esta sucesión.

2. Determina el límite de $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ cuando $x$ tiende a 2.

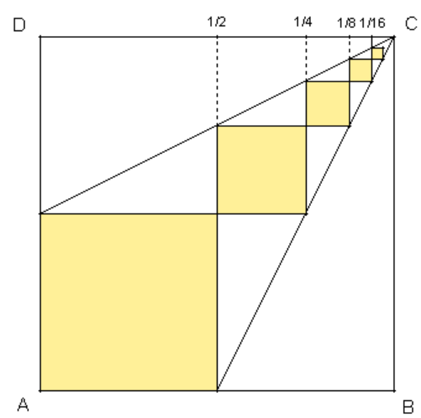
   (puedes usar una calculadora u otra herramienta apropiada para calcular)

| $x \to (2)^-$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 | … | 2 | … | 2,000001 | 2,001 | 2,01 | 3 | $(2)^+ \leftarrow x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) \to ¿$ | | | | | … | | … | | | | | $¿ \leftarrow f(x)$ |
| Aproximación a 2 por la izquierda ($x \to 2^-$) → | | | | | | = | ← Aproximación a 2 por la derecha ($x \to 2^+$) | | | | | |

   a. Grafica la función y determina si existen asíntotas verticales, horizontales, oblicuas.
   b. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to 2^+$? ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to 2^-$?
   c. Determina el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 3, si existe.

3. Contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Argumenta tu respuesta con ejemplos.
   b. El denominador de una determinada función se anula en $x = a$, ¿presenta siempre una asíntota vertical en $x = a$? Argumenta tu respuesta con ejemplos.
   c. ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, muestra algún ejemplo.
   d. ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?
   e. Si $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, ¿se puede afirmar que $f(x)$ es continua en $x = 1$? Explica.

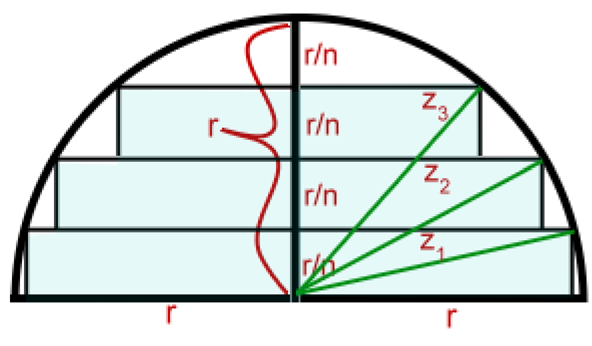
4. La imagen muestra un cuadrado unitario ABCD, cuyos lados se subdividen según las líneas punteadas.
   a. Determina la ecuación de la sucesión $(a_n)$, que representa el largo de los lados.
   b. Determina la ecuación de la sucesión $(b_n)$, que representa las áreas de los cuadrados coloreados.
   c. Conjetura acerca de los límites de ambas sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$.
   d. Determina simbólicamente los límites conjeturados.
   e. Conjetura acerca de límite de la serie $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k)$.
   f. Conjetura acerca de límite de la serie $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k)$.
   g. Determina simbólicamente el límite de la serie $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k)$.
   h. Determina simbólicamente el límite de la serie $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k)$.



5. Se considera la sucesión $(a_n)$, con $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$.
   a. Determina los primeros cuatro elementos, el décimo elemento, el centésimo, el milésimo y finalmente el mil milésimo elemento. Representa los elementos mencionados mediante fracciones.
   b. Conjetura acerca del límite $u$ de esta sucesión y determina para algunos valores de $\varepsilon$, como $\varepsilon = 0{,}000001$ ó $\varepsilon = 0{,}000000001$, el número $n_0$ a partir del cual todos los elementos de $(a_n)$ están en el "entorno $\varepsilon$" del límite $u$.
   c. Verifica algebraicamente el límite, mediante la operatoria con límites.
   d. Generaliza, desde la actividad b, el límite $u$ de la sucesión y muestra que, con otro número $v$, la verificación está fallando.

6. Determinar límites de funciones para $x \to x_0$ y $x \to \infty$.
   Se considera la función $f$ con $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2}$.
   a. Factoriza el denominador en la expresión fraccionaria $\frac{x+2}{x^2-4}$ de la ecuación funcional y determina los lugares $x_1$ y $x_2$ en los cuales la expresión fraccionaria se indefine. Menciona el dominio de la función $f$.
   b. Teniendo en consideración el dominio de la función, reduce la expresión fraccionaria a su forma más sencilla.
   c. Con herramientas digitales y utilizando la forma más sencilla de la ecuación funcional, elabora el gráfico de la función $f$.
   d. Con base en el gráfico, conjetura acerca de la existencia de los límites $\lim_{x\to x_1} f(x)$, $\lim_{x\to x_2} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   e. Verifica algebraicamente los límites, mediante la operatoria con límites.
   f. ¿En cuál de los lugares $x_1$ o $x_2$ hay continuidad de $f$?

7. Desarrollar el volumen de una esfera como límite de una serie de cilindros inscritos.
   La imagen representa una semiesfera del radio *r* cuyo volumen se aproxima mediante la suma de los cilindros inscritos con igual altura $h = \frac{r}{n}$.




   a. Determina los radios $z_k$ de los cilindros en dependencia de $n$.
   b. Determina la expresión algebraica del volumen $V_k$ de los cilindros inscritos.
   (resultado parcial: $V_k = \pi \cdot {z_k}^2 \cdot \frac{r}{n}$ con ${z_k}^2 = r^2 - k^2 \cdot (\frac{r}{n})^2$)
   c. Elabora la expresión algebraica de la serie $s_n$ de los cilindros inscritos $\sum_{k=1}^{n} V_k$, insertando el término para ${z_k}^2$.

d. Aplicando la fórmula de la suma de los cuadrados $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, determina el límite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} V_k$ y la fórmula del volumen de una esfera.

## PAUTA DE EVALUACIÓN

| | Niveles de logros | | |
|---|---|---|---|
| Criterios de evaluación | Completamente logrado | Se observa aspectos específicos que pueden mejorar | No logrado por ausencia o no se puede entender nada |
| Conjeturan acerca del valor del límite de sucesiones, series o funciones. | | | |
| Determinan elementos de una sucesión o serie para encontrar el término general. | | | |
| Determinan la convergencia o divergencia de sucesiones o series. | | | |
| Determinan límites de sucesiones o series de forma algebraica. | | | |
| Determinan límites de funciones de forma algebraica. | | | |
| Analizan la existencia o el valor de límites, usando aproximaciones por la derecha y la izquierda. | | | |
| Evalúan la existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas. | | | |
| Analizan la continuidad de las funciones en un punto, utilizando representaciones y el cálculo de límites. | | | |
| Modelan situaciones geométricas y de medidas, utilizando la noción de límites. | | | |
| Aplican fórmulas de sumas de cuadrados y de volumen para encontrar el volumen de una figura 3D, usando la noción de límites. | | | |