Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones

Propósito de la unidad

Se espera que los estudiantes comprendan que las funciones sirven para representar y modelar situaciones de cambio; el foco está en las nociones básicas de reversibilidad y composición de funciones en situaciones concretas. Los estudiantes comienzan con las situaciones de cambios modelados por la función lineal, cuadrática, potencia y exponencial, para continuar componiendo funciones y terminar con la inversa de una función. Las preguntas que orientan esta unidad son: ¿Por qué es necesario componer funciones para modelar algunos fenómenos? ¿Por qué hay problemas que requieren de la función inversa para ser resueltos?

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actividad 1: Modelar cambios con funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes identifican situaciones de cambio lineal o cuadrático para luego representar y comparar los modelos. Utilizan habilidades y conocimientos de 7° básico a 2° medio para conformar la noción de función, su representación y sus características esenciales. Este es el momento para que piensen con flexibilidad y reelaboren sus creencias y puntos de vista sobre las funciones y su aplicabilidad a situaciones diversas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

MOVIMIENTOS LINEALES Y CUADRÁTICOS

1. Observa las siguientes imágenes y describe a tu compañero lo que ves.

   a. ¿Describen estas fotos una situación de cambio? Explica a tu compañero dónde habría un cambio.
   b. ¿Se puede expresar el cambio de ambas situaciones de la misma manera? Comunica a tu compañero tu postura.
   c. Determina las variables que describen el cambio.

2. Lee la siguiente información: “Aquí podemos ver un tren rápido[4] en la fase de velocidad constante y un cohete de investigación en la fase del despegue. El desplazamiento del tren rápido se modela con un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el del cohete, con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Se considera que el tren rápido pasa en el instante $t = 0$ con velocidad constante y la mantiene en los próximos 40 segundos”.
    a. Comenta con tu compañero las palabras que no entiendes; busca su significado en un diccionario o en la web.
    b. Elabora una lista con palabras clave y, con ellas, explica a tu compañero lo que entendiste del párrafo.

3. La tabla se muestra los valores de tiempo transcurrido en segundos [s] y la distancia del tren en metros [m].

	Tiempo en segundos [s]	0	2	5	10	15	20	30	40
Tren rápido	Distancia en metros [m]	0	100	250					

    a. Completa la tabla.
    b. Grafica los puntos de la tabla, puedes usar alguna herramienta digital.
    c. Concluye cómo sería la gráfica para otros puntos, pensando en los intervalos de tiempo $[0;\ 1]$, $[1;\ 5]$, $[5;\ 10]$, $[10;\ 15]$, $[15;\ 20]$, $[20;\ 30]$, $[30; 40]$
    d. ¿Cómo cambia la distancia en términos del tiempo: doble, triple, cuádruple, … n-múltiple del tiempo?
    e. ¿Qué sucederá luego de estos 40 segundos? Evalúa con tus compañeros sobre el intervalo de tiempo y sobre definir el dominio y recorrido.
    f. Determina la función que describe este movimiento en el tiempo (MRU). Explícala a un compañero.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

4. La tabla muestra los valores de tiempo transcurrido en segundos [s] y la altura del cohete en metros [m]

	tiempo en [s]	0	2	5	10	15	20	30	40
Cohete de investigación	altura h(t) en [m]	0	80	500					

[4] Foto del tren: Proyecto Tren Santiago Valparaíso (TVS)
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.biobiochile.cl/noticias/nacional/region-metropolitana/2019/06/03/proyecto-de-tren-rapido-santiago-valparaiso-no-vera-la-luz-antes-de-2023.shtml

Completa la tabla y, con los datos, determina la función para el tiempo:

a. Utilizando herramientas digitales, elabora el gráfico de la función.
b. ¿Cómo cambian la altura en términos del tiempo: doble, triple, cuádruple, … n-múltiple del tiempo?
c. Determina la velocidad promedio en los intervalos de tiempo $[0,1]$, $[1,5]$, $[5,10]$, $[10,15]$, $[15,20]$, $[20,30]$, $[30,40]$.
d. ¿Cuál es la tendencia de las velocidades promedio con el pasar del tiempo?
e. ¿Qué sucederá luego de los 40 segundos? Extiende tu gráfico para describir cómo lo imaginas.
f. Evalúa con tus compañeros sobre el gasto de combustible y otros factores que podrían influir en esta situación.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

5. Compara las funciones generadas en el caso del tren con el caso del cohete.
   a. Comenta lo que ocurre al variar (aumentar o disminuir) los valores del tiempo, verbalmente y apoyándote en la información entregada.
   b. ¿Puedes asegurar que ambos modelos se mantienen en el tiempo? Explica a tu compañero lo que eso significaría.
   c. Averigua todo lo que puedas sobre ambas situaciones y compara con lo que ya tienes desarrollado.

6. Lee y responde.

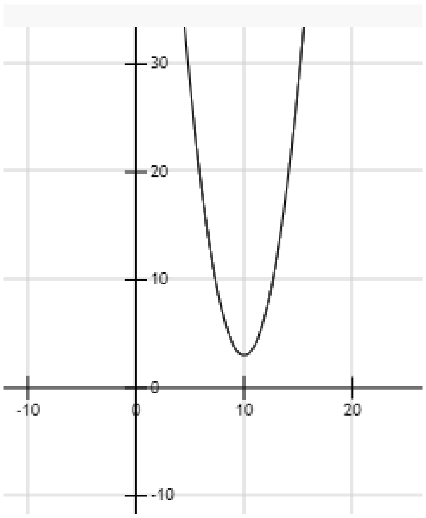
En el entrenamiento de atletismo escolar para la carrera de relevo, el primer atleta pasa con velocidad constante de $6{,}4\frac{m}{s}$ una marca que está puesta a una distancia de 8m del segundo atleta. En este instante, el segundo atleta parte con una aceleración constante de $3{,}2\ \frac{m}{s^2}$ para poder alcanzar al primer atleta, teniendo la misma velocidad de él.

a. Elabora una tabla de datos y la función correspondiente.
b. ¿En qué tiempo y en qué lugar alcanza el segundo atleta al primero, suponiendo que el primer atleta mantenga su velocidad y el segundo logre mantener la aceleración de tiempo de 5 segundos?
c. Representa la situación en un gráfico y compara con tus compañeros.
d. ¿Qué ocurre luego de la carrera con la función elaborada? Responde en términos del tiempo y el dominio de la función según el contexto.

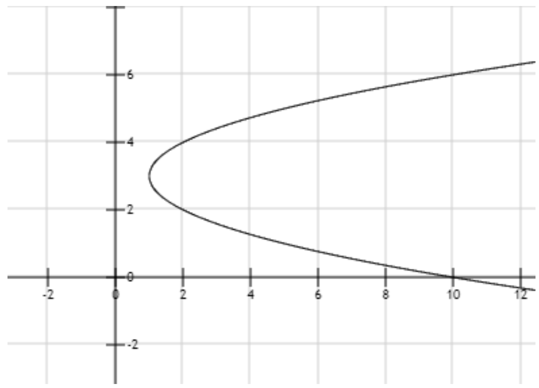
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

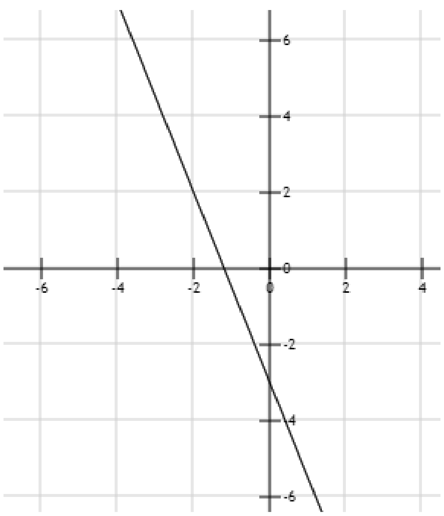
1. Se sugiere comenzar la unidad 1 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos de 2° medio; algunos ejercicios pueden ser:
   - ¿Cuáles son las características del gráfico de una función?
   - Indica si los siguientes gráficos representan una función y explícalo:



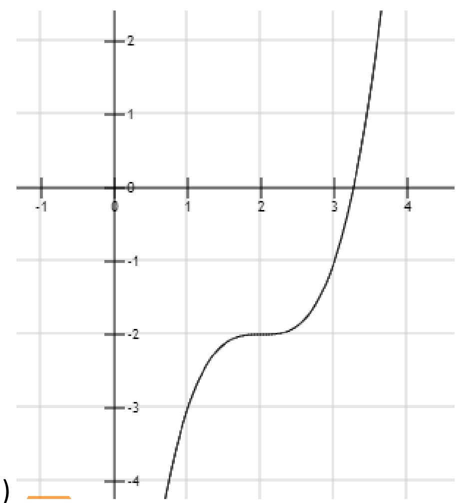
a)



b)



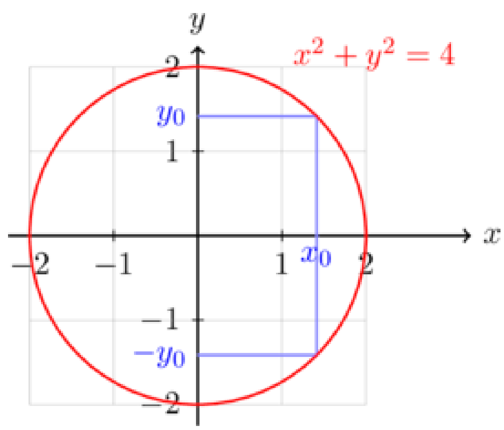
c)



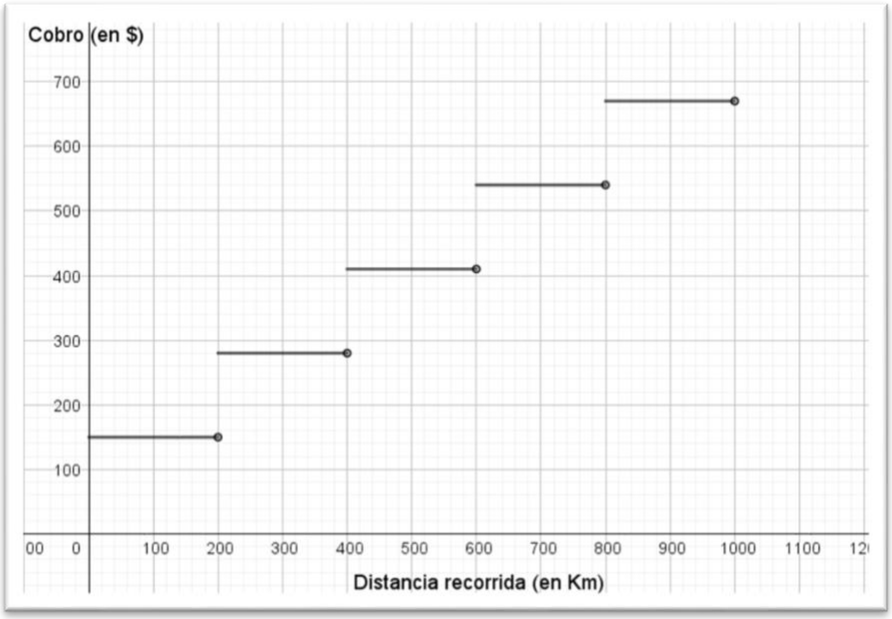
d)

- Describe el gráfico de la función $f(x) = kx^2$
  a) Para el caso k positivo b) Para el caso k negativo

2. Las situaciones de cambio se describen por una variable que tiene una transformación. Sugiera a sus estudiantes analizar qué es lo que cambia y qué se mantiene, mencione el tiempo y la altura o plantee preguntas como: ¿Cambia el tiempo? ¿Cambia la altura? ¿Cambia la forma del objeto? ¿Quién va más rápido?
3. Se sugiere recordar la fórmula de la velocidad para responder y profundizar en este tema; en el caso del cohete, se puede considerar la gravedad como $g = 10$.
4. Las funciones lineal y cuadrática ya han sido vistas en 8° básico y 2° medio, respectivamente; se las presenta de nuevo para dar énfasis a los intervalos y la continuidad de la función, precisando que el intervalo de partida es $[0, 40]$ para ambas situaciones y el de llegada es $[0;\ 2000]$ y $[0;\ 64\ 000]$ en el caso del cohete.
5. Dado que se entregó la función con datos puntuales, pero corresponde a una función continua, se sugiere trabajar este proceso de forma detallada. Algunas preguntas para orientar en este proceso son: ¿Cuáles son las unidades para medir el tiempo? ¿Qué ocurre con la distancia entre segundo y segundo? ¿Cómo se refleja la situación del tiempo en términos de la distancia? ¿Puede haber un salto en el gráfico?
6. Al término de la actividad y usando los gráficos, se puede identificar el conjunto de partida y llegada; además, el gráfico muestra que a cada punto del conjunto de llegada, le corresponde un único punto en el conjunto de partida.
7. Dependiendo del contexto de los estudiantes, se puede dar una definición formal de una función y dar ejemplos para conversar sobre cuándo una representación es o no función.
8. Algunas relaciones para debatir con ellos pueden ser:
   a. Ecuación de una circunferencia



b. El cobro por el uso de un taxi, de acuerdo a la distancia recorrida. Aunque se cobra por cada 200 m o cada 60s, en este caso solo se considera la variable de distancia recorrida. El cobro inicial es $150 y la tarifa aumenta $130 cada 200m.



9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática.
- Resuelven problemas relacionados con situaciones lineales o cuadráticas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video sobre modelamiento de una situación lineal, la caída de nieve
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/8th-linear-functions-modeling/v/exploring-linear-relationships
- Revista del Instituto de Matemática y Física, Experiencias de aula para modelar situaciones lineales
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matesup.cl/portal/revista/2006/6.pdf
- Introducción a las funciones cuadráticas como una herramienta de modelación, programa EPJA, Mineduc
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf

Actividad 2: Representar la composición de funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden la noción de componer funciones y utilizan representaciones pictóricas y simbólicas para la operatoria de funciones. También comparan la compuesta con la suma de funciones y reconocen diferentes funciones, pensando con flexibilidad para reelaborar e incluir conocimientos sobre la operatoria de funciones y cambiar eventualmente sus puntos de vista y creencias relacionadas con las funciones y su composición.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

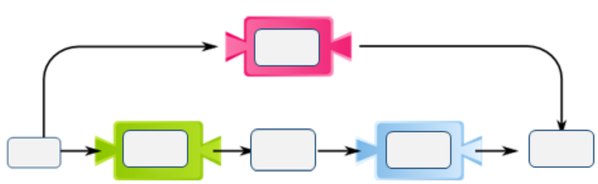
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

CONCEPTO DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. Observa el siguiente esquema y explica a tu compañero lo que entiendes al verlo.

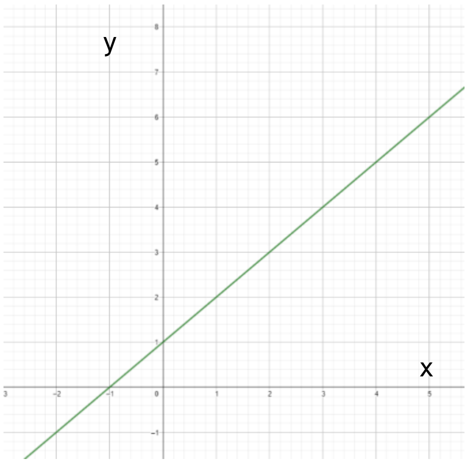


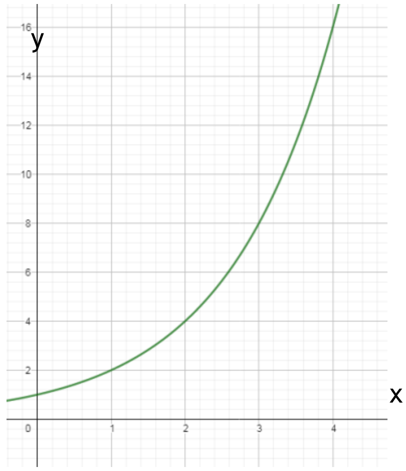
   a. Rotula el dibujo esquemático, formado por "máquinas", con las expresiones simbólicas de $g \circ f, f(g(x)), g, f, x$ y $g(x)$.
   b. Haz funcionar la máquina con un cambio afín $g(x) = x + 1$ y la función f potencia cúbica.
   c. Elabora la compuesta $g \circ f$ expresándola de la forma $g(f(x))$.
   d. Elabora la compuesta $f \circ g$ cambiando el orden de aplicación, ¿qué ocurre con el esquema?

LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONOCIDAS

La composición de dos funciones en comparación con la suma de las mismas funciones.

1. Observa los dos gráficos e identifica la función que representan.



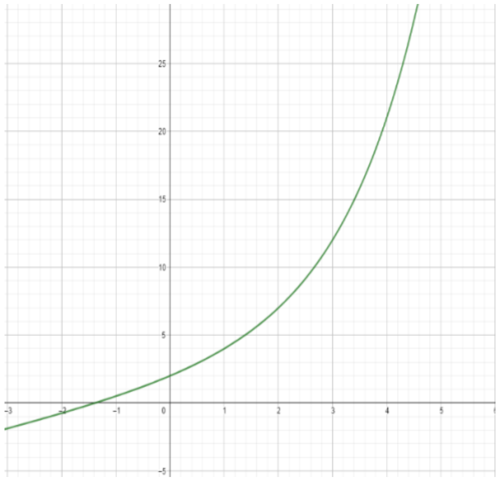


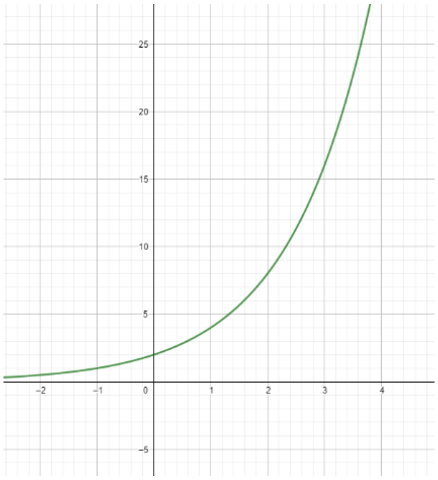
   a. A continuación, se presenta cuatro funciones:
      - $f(x) = 2^x$
      - $g(x) = x + 1$
      - $h(x) = 2^{x+1}$
      - $s(x) = 2^x + x + 1$

      Identifica la función con su gráfico.

   b. Identifica cada una de las funciones con alguna de las siguientes expresiones verbales:
      - La función exponencial más la función afín.
      - A la variable se le ha sumado uno.
      - La variable más uno es el exponente.
      - La variable es el exponente de la función.
      - La variable es el exponente y a la potencia se le ha sumado la variable y uno.

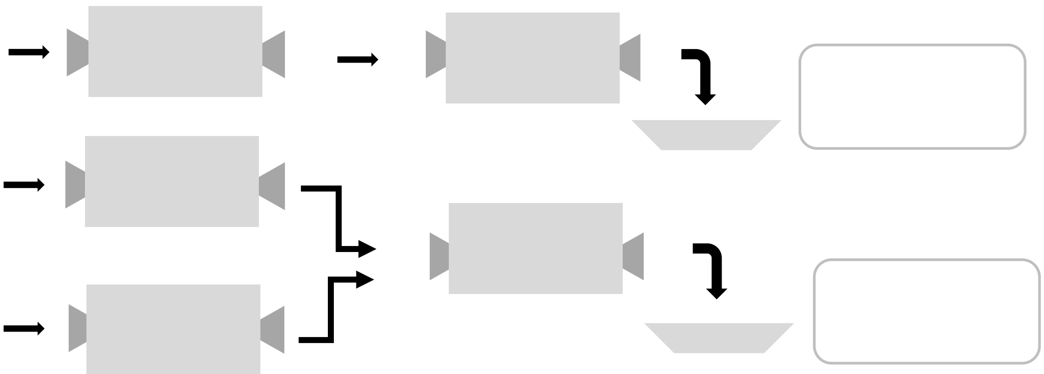
2. Observa los siguientes gráficos e identifica la función correspondiente:





   a. Identifica las diferencias y descríbeselas a tu compañero.
   b. ¿Qué relaciones puedes ver con las funciones presentadas antes?
   c. ¿Cuál de ellos representa la composición de funciones $f \circ g$? ¿Cómo puedes estar seguro?

3. La figura de abajo muestra dos modelos distintos de interacción entre máquinas que representan la operación aritmética (adición, sustracción, multiplicación o división) entre funciones, o la composición de funciones.



   a. Rotula en el recuadro los modelos correspondientes con “operación” o “composición”.
   b. Considera las funciones

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = x + 1$$

   y haz funcionar el esquema para la suma, la resta y la compuesta de estas funciones.
   c. Mirando el esquema de la composición de funciones, ¿qué rol tiene el recorrido de la primera función?

d. Elabora la ecuación de la función compuesta k en la cual se cambia el orden entre ambas funciones $g \circ f = k(x)$.

e. Elabora el gráfico de esta función compuesta k y contrástala con la función $h(x) = 2^{x+1}$.

4. Encuentra una función $t(x)$ tal que, al componerla con
$$g(x) = x + 1,$$
se obtenga la función I(x) = x.

5. Crea dos funciones tales que, al componerlas, obtengas la función I(x) = x

UNA FUNCIÓN MUY PARTICULAR

1. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x$.

a. Grafica la función en el plano cartesiano.

b. ¿Qué tipo de relación se da en esta función? Describe el comportamiento de la función con tus propias palabras.

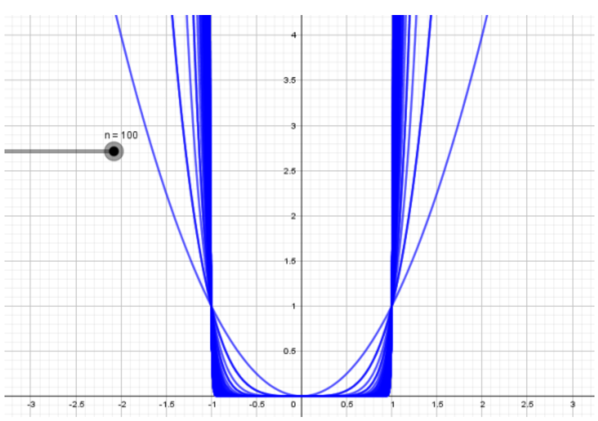
c. Considera distintos conjuntos de partida para la función; por ejemplo: solo los números naturales, solo los números enteros, solo los números racionales o intervalos. ¿Cuáles son las diferencias? ¿Qué ocurre con el conjunto de llegada?

d. ¿Por qué crees que es una función particular? ¿Qué dirías sobre lo que le ha pasado a la variable?

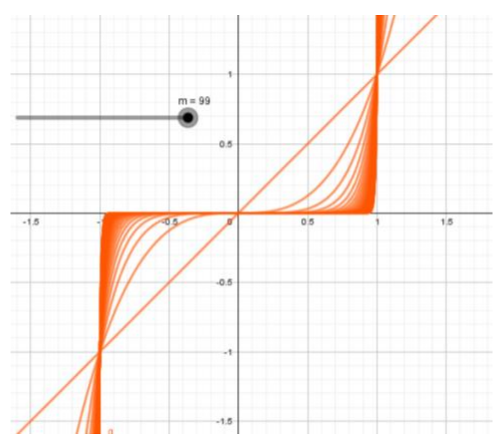
e. Compone varias veces la función con ella misma. ¿Qué ocurre? Y si sumas varias veces la función con ella misma, ¿qué ocurre?

FAMILIAS DE FUNCIONES

Enfóquense ahora en otros casos particulares de funciones potencia, dentro de la misma familia de funciones definida por $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. A continuación se muestra la gráfica de una familia de funciones.



Familia 1



Familia 2

Te puedes apoyar en la tecnología para responder y reflexionar sobre las preguntas:

a. ¿Qué condiciones para n se debe tener para generar la familia 1 y 2 de funciones?
b. ¿Qué diferencias hay entre ambas familias de funciones?
c. ¿Qué ocurre cuando compones algunas de estas funciones? Prueba dentro de una misma familia y luego con funciones de ambas familias.
d. ¿Qué ocurre si consideras otros valores para n enteros y menores a 1? ¿Se forma una nueva familia? Representa gráficamente estas soluciones.
e. ¿Qué ocurre cuando compones funciones de diferentes familias?

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN UN CONTEXTO DE LA ECONOMÍA

Un producto se fabrica en varias fases; por ejemplo: refinar la materia prima y después, convertir la materia refinada en un producto industrial.

a. ¿Por qué se puede modelar estos procesos industriales de producción con modelos matemáticos de composición de funciones? Argumenten y comuniquen la respuesta.
b. En la refinación de una materia prima se considera costos fijos k, más los ingresos variables por refinar, que son proporcionales a la cantidad x del material refinado. ¿Qué función matemática g puede modelar las ganancias en esta fase de producción? Elaboren la ecuación de esta función en general, sin valores numéricos; en ella, m es el factor de proporcionalidad.
c. En la Bolsa de Metales de Londres, el precio de una materia prima refinada varía cerca de US$ 2,21[5] por libra. Determinen el precio por megatonelada Mt[6].
d. En la producción de una de las materias primas refinada hay costos fijos de US$ $500\,000\,000$. Elaboren la ecuación de la función afín g que modela las ganancias por la refinación.
e. En la conversión de una materia refinada en un producto industrial, las ganancias por capital invertido se determinen aproximadamente por la función f con $f(z) = -0{,}2(z^2 - 6z)$, en la cual la variable z representa US$ $1\,000\,000\,000$. Conjeturen acerca del valor de z_m que representa las ganancias máximas. Expliquen la conjetura.
f. Completen la siguiente tabla funcional para verificar o rechazar la conjetura.

z	0	1	2	3	4	5	6
$f(z)$							

g. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de la función f.

[5] $US: dólar estadounidense
[6] 1Mt = 1 000 000t

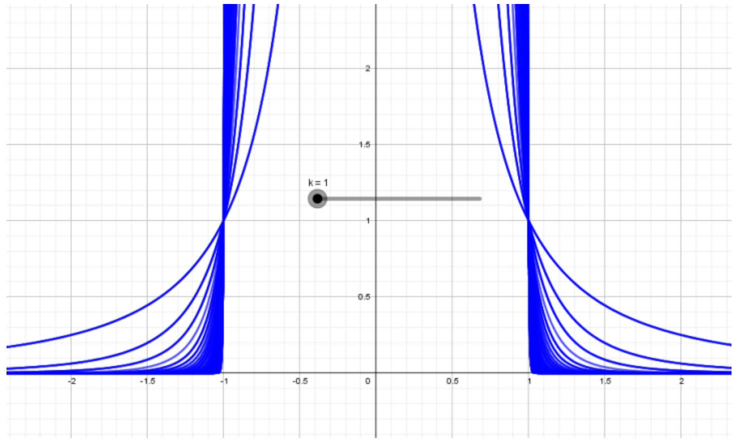
h. Considerando el gráfico, ¿qué pasa con el capital invertido si se sobrepasa el valor de US$ 6 000 000 000?
i. Desarrollen la ecuación de la composición de ambas funciones $g \circ f$.
j. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de $g \circ f$.
k. ¿Hasta qué cantidad de materia refinada se obtiene ganancias en la conversión ulterior a un producto industrial?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

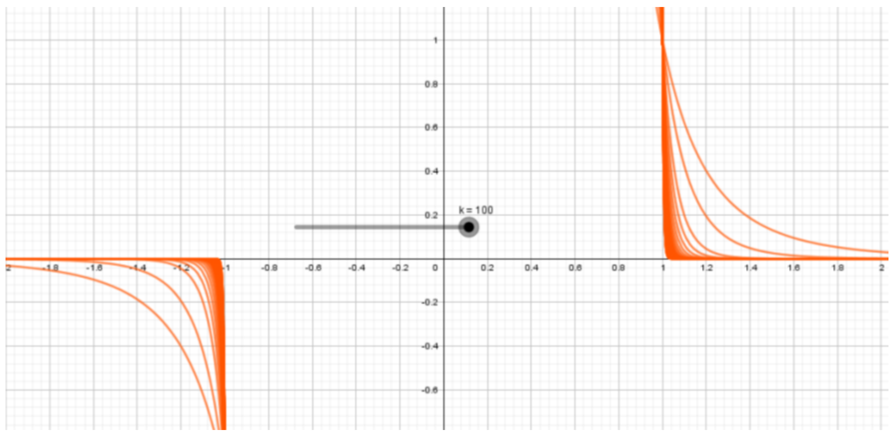
1. En estas actividades se propone el estudio particular, inicialmente sin contexto cotidiano, de la función exponencial y la compuesta con la función lineal, dada la cercanía con los estudiantes. Desde 8° básico vienen trabajando con la función lineal, primero como relación de proporcionalidad directa para luego generalizarla como la función afín. Más adelante, en 2° medio, estudian la función cuadrática y la raíz cuadrada, momento en que se da un énfasis a la aplicación de estas funciones. En este curso, se debe profundizar en términos de describir el dominio y el recorrido, y encontrar condiciones para invertir las funciones; además, se tiene que enfatizar en describir el comportamiento de la función y las situaciones de cambio que describen. La función potencia se estudia en 4° medio en detalle. Si no se ha trabajado antes de esta actividad, no debiese ser un obstáculo para realizarla, ya que se usa el gráfico y el docente puede describir y comentar su comportamiento para luego profundizar en esta función.
2. Se espera que los jóvenes propongan varios casos particulares de la función potencia, diferenciando entre el caso de la función potencia de exponente par positivo y la función potencia de exponente impar positivo.
3. Según el contexto de sus estudiantes, se sugiere hacer el mismo tratamiento para la función raíz enésima par, donde pueden apreciar otras funciones y aproximarse a la noción de inversa.
4. En los casos estudiados, se puede tratar las definiciones no formales de la inyectividad y sobreyectividad junto con la técnica de la línea horizontal, que indica que, si toda línea horizontal toca a lo más un punto de la curva, es inyectiva, y si toca al menos un punto, es sobreyectiva. Se recomienda que los estudiantes argumenten utilizando el gráfico. Si lo estima adecuado, conviene hacer las definiciones formales para trabajar la escritura simbólica matemática.
5. Si el contexto y el tiempo lo permiten, se sugiere trabajar las siguientes funciones de familias:

   – La familia de funciones $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$.
   – La familia de funciones potencia $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$

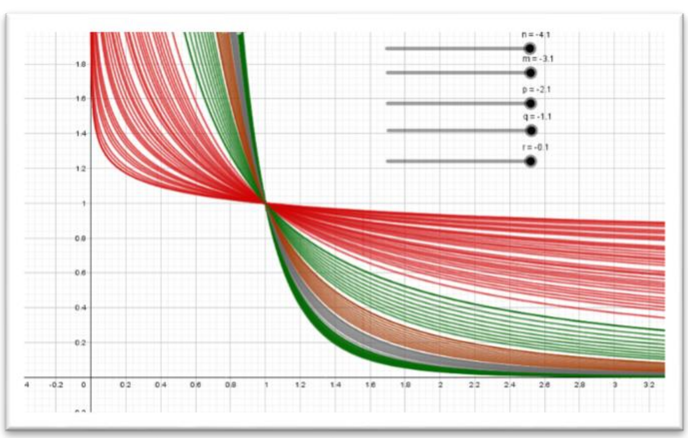
   Caso $n = -2k, k \in \mathbb{N}$; es decir, exponentes pares negativos.



Caso $n = -2k + 1, k \in \mathbb{N}$, es decir, exponentes impares negativos.



Caso valores negativos de n en intervalos; por ejemplo: $-5 < n < -4$; $-4 < n < -3$; $-2 < n < -1$; $-1 < n < 0$.



6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
    - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
    - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Calculadora gráfica DESMOS
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.desmos.com/calculator

- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc

- Guía con definiciones y algunos ejercicios
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F160049%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FFunciones.pdf

Actividad 3: Comprendiendo la reversibilidad por medio de la función inversa

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan responsablemente para lograr metas comunes; en este caso, comprender la aplicabilidad de la inversa de una función y entender cuáles son sus aportes al desarrollo científico. Como punto de partida, se analiza el problema de determinar la edad de un fósil a partir del método del carbono 14 y se modela el fenómeno por una función exponencial. Además, se pretende que encuentren la inversa de funciones, apoyándose tanto en la representación y la reflexión de la curva sobre la función identidad, como en cálculos algebraicos. Para esto, se espera que piensen con flexibilidad para reelaborar sus ideas y creencias sobre el trabajo con funciones.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

LOS FÓSILES

1. Seguramente has escuchado hablar del descubrimiento de fósiles de miles de años, que permiten inferir cómo era la vida hace tanto tiempo. ¿Cómo es posible que los científicos puedan conocer su edad? ¿Por qué pueden afirmar con tanta seguridad, por ejemplo, que tal fósil tiene alrededor de 30 000 años? Comparte tus ideas con tu compañero.

2. Lee la siguiente información con tu compañero: “Un método muy usado por los científicos es el del carbono 14 (C-14). Aunque presenta algunos problemas, como que no es válido para datar fósiles de más de 50 000 años, su fundamento es simple y se basa en el periodo de descomposición del fósil.

El carbono 14 es un isótopo[7] del carbono que se forma en las partes altas de la atmósfera a partir del nitrógeno. Cuando una planta hace la fotosíntesis, desde que nace hasta que muere, fija carbono en su interior, que incluye el isótopo carbono 14. Cuando muere la planta, comienza la fosilización y el proceso inverso: el carbono 14 empieza a transformarse de nuevo en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno que hay en el fósil encontrado, se puede conocer su edad aproximada".

a. Averigua las palabras que no entendiste y busca su definición en un diccionario o en la web.
b. Comparte tus definiciones con tu compañero.
c. Busca las palabras clave para describir el texto y formula una o dos frases con ellas. Compártelas con tu compañero.

3. Lee el resto del siguiente texto: "En los seres vivos que no son plantas, el proceso de fijación de carbono 14 ocurre cuando se alimentan de organismos que sí hacen la fotosíntesis. En el animal, cuando muere, empieza el mismo proceso que en la planta muerta. El carbono 14 comienza a transformarse en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno, se establece su edad. La masa de carbono 14 de cualquier fósil disminuye exponencialmente. Sabiendo la diferencia entre la proporción de carbono 14 que debería contener un fósil si aún estuviese vivo y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte".

a. Explícale a tu compañero con tus propias palabras lo que entendiste del texto.
b. ¿Qué relación podría tener el texto con las funciones? Comparte tu idea a tu compañero y traten de formar una sola idea.
c. Si encontraran un fósil, ¿qué podrían hacer para determinar hace cuánto tiempo vivió? Averigua cómo lo hacen los científicos.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA a, e, 3° y 4° medio

DETERMINANDO LA EDAD DE UN FÓSIL Y LA FUNCIÓN INVERSA

1. El periodo de semi-descomposición o vida media es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radioactiva. Para el carbono 14, este período es de 5 730 años.
   $f(0)$ es la cantidad de carbono 14 al momento de morir.
   t es el tiempo transcurrido luego de la muerte del ser vivo.
   $f(t)$ es la cantidad de carbono 14 hallada en la muestra en el tiempo t.

a. Completa la tabla con la proporción de carbono 14 que habrá en un fósil, transcurridos los períodos de tiempo que se indican, a partir de la muerte de un ser vivo.

[7]Se denomina isótopos a los átomos de un mismo elemento, cuyos núcleos tienen una cantidad diferente de neutrones y, por lo tanto, difieren en número másico. Fuente: Wikipedia.

Tabla 1: Relación entre el tiempo transcurrido y la proporción de C14

Tiempo (vida media) t	Proporción de C14, respecto de $f(0)$, que hay en la muestra $\frac{f(t)}{f(0)}$
0 (en $f(0)$)	1
5730	½
11 460	¼
17 190	
22 920	

b. Bosqueja esta relación en el plano cartesiano; gradúa adecuadamente los ejes.
c. Señala si la relación es funcional. Argumenta.
d. Indica dominio y recorrido de $\frac{f(t)}{f(0)}$ y conjunto de partida y llegada.
e. Describe cómo varía $\frac{f(t)}{f(0)}$ por cada 5 730 años que transcurren desde la muerte del ser vivo.
f. ¿Conoces algún modelo matemático que permita acercarse a la función entre $\frac{f(t)}{f(0)}$ y t?

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

2. Para los restos fósiles, el valor de la proporción entre el carbono 14 en un periodo t, respecto del carbono 14 que había al momento de la muerte del ser vivo, viene dado por la expresión:

$$\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-0{,}00012t}$$

Para poner a prueba el modelo encontrado:

a. Describe la velocidad de decrecimiento de $\frac{f(t)}{f(0)}$ respecto de t. Indica los criterios que has usado.
b. Si un ser vivo murió hace 12 000 mil años, ¿qué porcentaje de C14 debería contener su fósil?
c. Comprueba con el modelo algebraico que, a los 5 730 años, la proporción de C14 es $\frac{1}{2}$. Explica los cálculos realizados.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

3. ¿Cómo se aplica el modelo anterior si se quiere determinar la fecha de muerte de un ser vivo, cuyo fósil contiene 23% de carbono 14?
En la actualidad, este método se utiliza así, "de forma inversa", dado que hay dispositivos lo suficientemente precisos para determinar el porcentaje de C14 en un fósil, y lo que se desea es saber de qué época es.
a. ¿Siempre se puede determinar un valor t para un porcentaje de C14 dado?

   b. ¿Se puede “revertir” lo que hace la función para conocer el valor de t?
   c. Si f transforma a t en $f(t)$, ¿se puede determinar una función que transforme a $f(t)$ en t?

4. Se desea conocer la data de muerte de un fósil con un 23% de C14.
   a. ¿Cómo podrías usar la expresión anterior $f(t)$ para determinar t?
   b. ¿Cómo podrías encontrar una expresión para t desde la expresión algebraica de $f(t)$?

5. Enuncia en términos generales la expresión para determinar t en términos de $f(t)$.
   a. La expresión encontrada, ¿es también una función?
   b. ¿Qué restricciones debería tener el conjunto de partida y llegada de f para que la nueva expresión pueda ser una función?
   c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta nueva función?

6. Reescribe la nueva función, considerando que ahora t es $f^{-1}(t)$ y que $f(t)$ ahora es t.
   a. ¿Qué crees que significa esto?
   b. ¿Por qué se puede y debe hacer este cambio?

7. Evalúa ambas funciones en $t = 1$ y luego en $t = 0{,}5$
   a. En f, ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0{,}5$?
   b. En f^{-1}, ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0{,}5$?

REPRESENTANDO LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

1. Consideren la función $f(x) = 2^x$.
   a. ¿Conocen algún problema que se pueda modelar con una función de este tipo?
   b. ¿Cuáles son el conjunto de partida y de llegada de esta función?
   c. Despejen x en términos de $f(x)$. ¿Qué expresión algebraica obtienen?
   d. Reescriban la nueva expresión, considerando que ahora x es $f^{-1}(x)$ y que $f(x)$ ahora es x. Expliquen por qué se debe hacer este cambio en las variables.

2. En un mismo plano cartesiano, grafiquen $f^{-1}(x)$ y $f(x)$.
   a. Describan qué particularidades ven en ambas gráficas.
   b. ¿Qué ocurre en el punto $(0,1)$ y su simétrico?
   c. Dibujen la recta $y = x$ en el plano cartesiano anterior. ¿Qué pueden decir de ambas curvas respecto de la recta $y = x$?

3. La función cuadrática $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x^2$, ¿tiene inversa?
   a. Grafiquen la función h.
   b. Luego grafiquen $y = x$.
   c. ¿Qué deberían esperar de la función inversa con respecto a la gráfica?
   d. ¿En qué intervalos de $\mathbb{R}$ está definida la función h^{-1}?

e. ¿En qué intervalos de $\mathbb{R}$ para h existe h^{-1}?
f. ¿Qué condición debe cumplir la definición de una función para que exista su función inversa?
g. Obtengan h^{-1} de forma algebraica. Indiquen las restricciones del dominio y recorrido.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La introducción de la función inversa se puede hacer directamente desde un gráfico, o mediante un contexto científico que requiere dar respuestas a los diferentes problemas. Se presenta una función exponencial dependiente del tiempo, y se plantea como una necesidad del mismo contexto invertir el camino; es decir, buscar un valor de tiempo, dado un valor del recorrido. Se desea instalar la idea intuitiva de que buscar una función inversa equivale a realizar el camino inverso: si f transformó a t en $f(t)$, entonces se desea invertir aquello que hizo f a t para determinar t, conociendo $f(t)$.

2. Para que los estudiantes reconozcan el modelo inicial, se recomienda usar una lista sistemática de valores que relacionen t y $\frac{f(t)}{f(0)}$, y no presentar de inmediato la función modeladora. En este caso, $\frac{f(t)}{f(0)}$ va variando cada 5 730 años en la mitad de su valor anterior, partiendo de 1, pues al relacionar $f(t)$ y $f(0)$ se tiene una proporción, motivo por el cual se puede interpretar su resultado como porcentaje. En este ejemplo, $\frac{f(t)}{f(0)} = 0{,}23$ se interpreta como 23%.

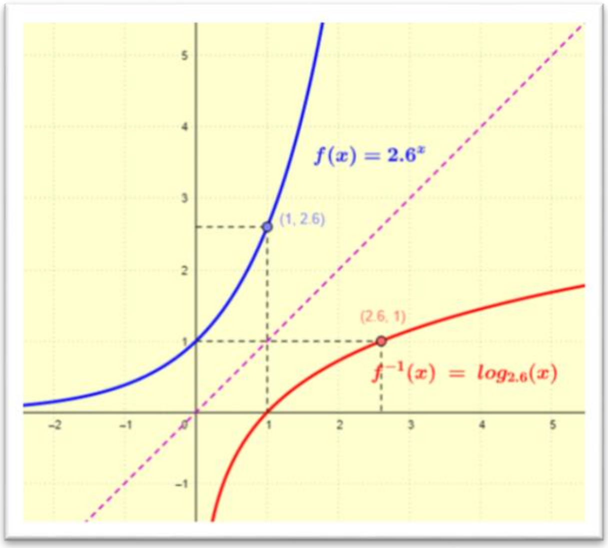
3. Se considera el estudio de $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$ y no de $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, dado que lo que se mide en la realidad es una comparación entre lo que había y lo que se encuentra al momento de medir el C14 en el fósil. En la literatura, la expresión aparece como $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, pero, para simplificar el tema, se ha optado por trabajarlo de forma explícita como la comparación, usando $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$.

4. De igual modo, simplificando el problema, se propone presentar el modelo con el valor $k = 0{,}00012$, donde el docente debe evaluar si esto es necesario o puede plantearlo como un desafío a algunos o todos sus estudiantes. En el recuadro de sugerencia, junto al punto 2, se muestra una forma de encontrar el valor de k.

5. El profesor debe supervisar constantemente la notación de función inversa que se introduce, pues se sabe que –en el estudio de las funciones– entender la notación que se usa es difícil para los estudiantes. En este caso, se debe enfatizar en que la inversa de una función no es lo mismo que el inverso multiplicativo de ella. No es igual f^{-1} que $\frac{1}{f}$.

6. Se sugiere indicarles que se puede determinar la inversa de una función, siguiendo la definición de función inversa como $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$, donde $f: A \to B$ y $f^{-1}: B \to A$, y agregando que f debe ser biyectiva en todo el dominio o en un intervalo de él.

7. En los tres casos de funciones y sus inversas, se analiza la forma gráfica de las funciones inversas, en caso de existir. Usando la recta $y = x$, se busca la curva simétrica de $f(x)$ y se obtiene $f^{-1}(x)$. Conviene usar algún programa para visualizar la curva y su simétrica a partir de una recta. Así se puede ir generalizando la función inversa de las funciones lineal, cuadrática, potencia y exponencial.



8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Contenidos breves y ejemplos de función inversa
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/funcion-inversa/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatio.com/calculo-de-la-funcion-inversa-ejercicios-resueltos-paso-a-paso/
- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc
- El carbono 14 explicado de forma sencilla
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.portalastronomico.com/el-carbono-14/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.ehu.eus/biomoleculas/isotopos/carbono14.htm

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm
- Calculadora de funciones inversas, solo la parte algebraica
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.symbolab.com/solver/function-inverse-calculator/inversa%20f%5Cleft%28x%5Cright%29%3Dx%5E3?or=ex

Actividad 4: Modelar situaciones utilizando la composición de funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes modelan situaciones, utilizando la compuesta de funciones. También responden problemas y crean una situación a partir de funciones y su compuesta. Para esto, piensan con flexibilidad a fin de reelaborar sus ideas y representaciones sobre la función compuesta y su conexión con situaciones o fenómenos científicos, cotidianos o económicos.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

COMPRENDIENDO EL RECORRIDO DE FRENADO

1. En la escuela de conducir, a los alumnos se les enseña una fórmula con la cual se puede calcular el recorrido s de frenado de un auto, en términos de la velocidad v que tiene el automóvil.

$$\boxed{s = 0{,}01 \cdot v^2}$$

La velocidad v está en $[\frac{km}{h}]$ y el recorrido s se debe presentar en metros $[m]$.

El siguiente gráfico muestra los metros que se debe recorrer para frenar según la velocidad que tiene el vehículo.

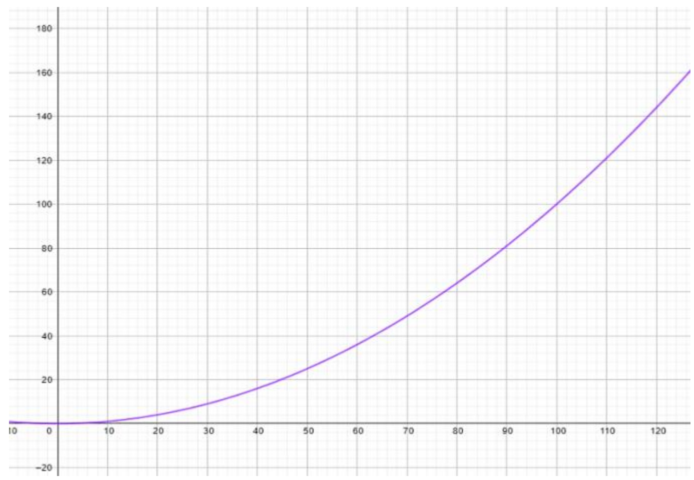


Figura 1: Distancia de frenado según velocidad del automóvil.

a. Elabora una tabla con datos extraídos del gráfico.
b. ¿Qué velocidad crees que sería la prudente para andar en la ciudad?
c. ¿Qué relaciones puedes sacar entre posiciones de letreros, semáforos y pasos peatonales? Prepara una lista de condiciones sobre letreros, semáforos y pasos peatonales, que estén apoyadas por los datos de la tabla o del gráfico.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, 3° y 4° medio

2. Ahora debes considerar la siguiente situación real: Un auto tiene un desperfecto en su tacómetro; por lo tanto, en vez de la verdadera velocidad v, indica una velocidad falsa v_f que considera un 10% menos que la verdadera.

   a. Completa la siguiente tabla de valores

v	$10\ \frac{km}{h}$	$25\ \frac{km}{h}$	$40\ \frac{km}{h}$	$60\ \frac{km}{h}$	$90\ \frac{km}{h}$
v_f	$9\ \frac{km}{h}$				

   b. Elabora la ecuación de la función que relaciona la velocidad falsa v_f con la verdadera velocidad v.
   c. Evalúa la situación en relación con el peligro que presenta.
   d. Argumenta tu respuesta anterior con la ecuación de la función compuesta que modela el recorrido de frenado falso.
   e. Muestra con valores concretos lo que ocurriría en caso de tener que frenar y el tacómetro tiene un desperfecto. Elabora el gráfico para apoyar tus argumentos y generalizar todas las situaciones.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

f. Contrasta el gráfico de la función compuesta con la función original, y deduce a partir de qué momento la situación presenta un peligro.

MODELANDO LA COMPRA Y VENTA CON LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Un vendedor de una tienda de electrodomésticos anuncia un descuento de 10% en todas sus lavadoras. Además, por una promoción del fabricante, se ofrece una rebaja de $20 000 por la compra de una lavadora de una marca particular.

a. Encuentra una función f que modela el precio de una lavadora cualquiera de la tienda, considerando solo el descuento de la tienda con respecto al precio original.

b. Encuentra una función g que modele el precio de una lavadora de la marca del fabricante que ofreció el descuento de $20 000, sin considerar el descuento para toda la tienda.

c. Encuentra $g \circ f$ y $f \circ g$. Señala qué representa cada función según el contexto.

d. Si una familia desea comprar una lavadora de $\$150\ 000$, ¿cuál de los tratos le conviene más?

e. ¿Qué recomendaciones se puede hacer sobre los descuentos de la tienda?

f. Si fueras comerciante de la tienda y fabricante, ¿qué es lo que más te conviene? Argumenta tus respuestas basado en la composición de funciones.

CREACIÓN DE SITUACIONES PARA LA COMPUESTA

1. Consideren ahora dos funciones del mismo tipo que en el caso anterior y grafíquenlas.

$$f(x) = 2x \qquad g(x) = x^2$$

   a. Hagan un listado de situaciones que se puedan asociar a $f(x)$.
   b. Hagan un listado de situaciones que se puedan asociar a $g(x)$.

2. ¿Cómo se visualiza gráficamente la composición de ambas funciones en un plano cartesiano?
   a. Determinen algebraicamente $g \circ f$ y $f \circ g$.
   b. Completen las dos tablas de valores y luego grafiquen ambas compuestas en el plano cartesiano.

Tabla 1: Tabla de valores para x, $f(x)$ y $g(f(x))$

x	$f(x)$	$g \circ f$
0		
0,2		
0,4		
0,6		
0,8		
1		

Tabla 2: Tabla de valores para x y $f \circ g$

x	$f \circ g$
0	
0,2	
0,4	
0,6	
0,8	
1	

c. Grafiquen las funciones y las compuestas en dos planos cartesianos.
d. Describan cómo varía el rol de x (valores en el eje X) en las tres gráficas.
e. ¿Cuál es la forma gráfica para componer dos funciones en un plano cartesiano?
f. Apoyándote en el listado de situaciones elaborado anteriormente, crea una situación que pueda interpretarse por medio de la compuesta $g \circ f(x)$. (Nota: Puedes imaginar situaciones ficticias, lo importante es que la compuesta tenga sentido en el contexto que ideaste).

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que los estudiantes identifiquen la función $h(v) = 0{,}9\,v$ como la que indica la velocidad falsa, y la función $c(v) = 0{,}01 \cdot (0{,}9v)^2$ como la función compuesta; para esto, primero tienen que encontrar la función h y después, la compuesta. Se debe precisar que el proceso de "evaluar" una variable en otra función corresponde a la composición de dos funciones.

2. Conviene comparar los dos gráficos para resaltar el tema de la velocidad y los cuidados que se debe tener para andar en zonas peatonales, de escuelas y donde hay niños jugando. Se podría complementar esta actividad con señalizaciones y su ubicación en las calles.

3. Se recomienda introducir la notación de composición de funciones, $g \circ f$ como una expresión equivalente a $g(f(x))$. Pueden deducir esta última perfectamente durante la actividad, pues en ella se enfatiza que $g(f(x))$ significa que g ha sido evaluada en $f(x)$. El docente debe verificar que los jóvenes comprenden la notación, que no la confunden con un producto de funciones y, además, que respetan el orden en que se aplica.

4. Según el contexto del curso, se puede profundizar en términos de los conjuntos de llegada y de partida para la composición de funciones. Lo mismo se puede hacer respecto de la notación simbólica y en el trabajo con la compuesta de funciones conocidas. Cabe considerar la modelación para trabajar con otras funciones.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Material para practicar, con soluciones
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/WFunciones/Composicion_de_funciones.htm

- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc

- Wiki GeoGebra, cómo agregar restricciones al dominio y recorrido de una función
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://wiki.GeoGebra.org/es/Comando_Funci%C3%B3n

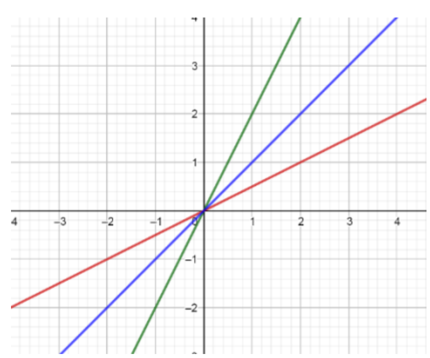
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada. **OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática. • Modelan situaciones lineales o cuadráticas, restringiendo parámetros. • Representan la inversa o la composición de funciones, utilizando gráficos y lenguaje algebraico. • Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente. • Modelan situaciones por medio de la inversa o de la composición de funciones.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se recomienda usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1; pueden emplearse cada una por sí misma o en conjunto. Los estudiantes pueden trabajar la evaluación de forma personal o colaborativa. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación, pues permite al alumno ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS EN UN AMBIENTE CARTESIANO



1. Se consideran pares de funciones de una función f con su inversa f^{-1}.
   a. ¿Por qué las rectas verdes y rojas representan un par de función f e inversa f^{-1}, respectivamente?
   b. ¿Por qué la función g representada por la recta azul es inversa de sí misma?
   c. Verifica esta propiedad de la función g mediante un diagrama sagital.

2. Se considera la función f con $f(x) = \frac{1}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de f en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.
   b. ¿Qué simetría axial tiene el gráfico de f y qué se puede conjeturar acerca de su función inversa f^{-1}?
   c. Desarrolla la función inversa f^{-1} para verificar o rechazar la conjetura.
   d. Verifica algebraicamente qué funciones g con $g(x) = a \cdot x^{-1}$,$(a \neq 0)$ son inversas de sí misma.
3. Con base en los resultados de las actividades anteriores, determina la función afín h, que es inversa de sí misma, y verifica gráficamente el resultado mediante herramientas digitales.
4. Se considera la función k con $k(x) = \frac{-2}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de k para $x > 0$ con herramientas tecnológicas
   b. ¿Es k inversa de sí misma? Argumenta gráfica o algebraicamente.

MODELANDO LOS COSTOS DE EMPAQUE

Una empresa que empaca libros de enciclopedia envía a los clientes, estima en $\$10\ 000$ los costos fijos de empaque para mantener su infraestructura. Se quiere modelar la situación de costos variables con una función afín decreciente para que, a partir de 10 ejemplares, el envío quede libre de aquellos costos fijos. En otra variante, se piensa en el modelo de la proporcionalidad inversa que considera, por ejemplo, costos de $\$2\ 000$ de empaque si se encarga 5 libros.

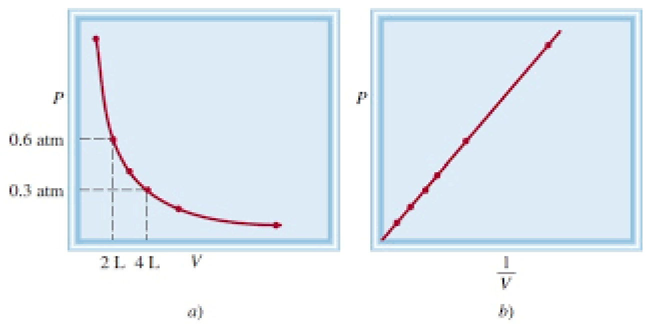
a. Elaboran el gráfico que representa la función *f* del primer modelo y la función *g* del segundo modelo. (Escala: eje X: 1 una unidad representa 1 libro, eje Y: 1 unidad representa $\$1\ 000$).
b. Determinan ambas funciones.
c. Explican el significado de la variable independiente y de la variable dependiente, para la función inversa de ambas funciones.
d. ¿Qué debilidades tienen ambos modelos, si se sobrepasa los 10 ejemplares?
e. ¿Qué debilidad tiene el modelo de la proporcionalidad inversa con respecto a los gastos fijos?

Para la tarea “Modelamiento de una situación del ámbito de la economía”, puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Determinan las variables del contexto para elaborar tablas, gráficos y funciones.	Describen las variables del contexto según los modelos presentados en el problema.	Describen variables asociadas a un modelo del problema.	Identifican información del problema y asocia letras con frases del problema.
	Elaboran tablas, gráficos y funciones de forma manual o utilizando tecnología.	Elaboran tablas, gráficos y funciones que están relacionados de alguna manera con el problema.	Ordenan la información del problema.
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.	Determinan e interpretan la función inversa de cada modelo según las variables y el contexto.	Determinan la función inversa de cada modelo.	Determinan funciones inversas de otros modelos completamente diferentes a los presentados.

MODELANDO EL VOLUMEN Y LA PRESIÓN DE GASES

Un recipiente de gas tiene un pistón móvil. Si se disminuye el volumen del gas, se aumenta la presión del gas. Durante el proceso del cambio del volumen, se debe mantener la temperatura del gas (proceso isotérmico) para evitar accidentes.



a. ¿Qué función de presión y volumen representan los gráficos?

b. Elabora la función *p* que modela la presión en dependencia del volumen.

c. ¿Por qué el segundo gráfico modela el mismo fenómeno? ¿Qué debilidades presentan los modelos?

d. Determina la función inversa p^{-1} de la función *p* según el primer gráfico.

e. Elabora el gráfico de la función inversa p^{-1} y explica el cambio del significado de las variables.

TRABAJANDO ALGEBRAICAMENTE

1. Despejar las ecuaciones según la variable indicada en paréntesis.

   a. $2y - 3x = -1 \ (y)$

   b. $\frac{1}{4}x + 2y = \frac{1}{4} \ (x)$

2. La función f tiene la ecuación $f(x) = 2x + 5$. Determina la pendiente de la recta que representa la función f^{-1}.

3. En algunas ocasiones es posible confundirse con el símbolo de producto y el de composición, como en el caso de $(f \cdot g)(x)$ o $(f \circ g)(x)$.
   a. $I(x)$ se obtuvo como el producto de dos funciones. Prueba componiendo las mismas funciones y verifica si la resultante es igual a $I(x)$ o es distinta.
   b. Interpreta ambas composiciones de funciones y compárenlas con $I(x)$.

4. Encuentra $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$, utilizando herramientas digitales si es posible y confirmando los resultados de forma algebraica.

   a. $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x - 3$
   b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   c. $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

5. Grafica las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4x + 1$.

   a. Marca un punto C en el eje X.

   b. Traza una recta vertical que pase por C y que corte a la gráfica de $f(x)$ y a la gráfica de $g(x)$.

   c. Copia sobre $g(x)$ el segmento formado entre C y la gráfica de $f(x)$, como se muestra en la figura.

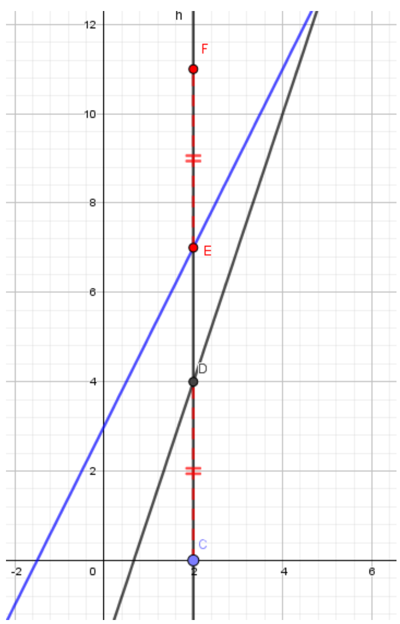
   d. Repite lo anterior, ubicando otros puntos sobre el eje X.

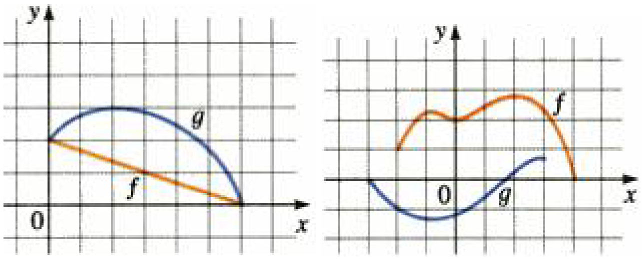
   e. Completa con la forma gráfica que une los puntos obtenidos.

   f. Por otro lado, suma algebraicamente las funciones f y g; es decir, determina $(f + g)(x)$.

   g. Compara la función resultante con la forma gráfica obtenida.

   h. Prueba con otros ejemplos de funciones y generaliza para la adición de funciones.





i. Prueba con otras operaciones. ¿Son todas igualmente fáciles de obtener gráficamente?

6. Realiza las siguientes acciones: Se considera la función afín f con $f(x) = 2x - 1$.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1}.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Qué propiedad existe entre los tres gráficos?
   c. Marca el dominio y recorrido en los ejes con diferentes colores.

7. Se considera la función cuadrática g con $g(x) = x^2$.
   a. Dibuja el gráfico de g.
   b. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1}.
   c. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de g y g^{-1} junto con la bisectriz del primer cuadrante.

8. Aplicación del concepto inversa de una función a funciones conocidas.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1} de la función exponencial f con $f(x) = 2^x$.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
   c. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1} de la función logarítmica g con $g(x) = \log_{10} x$.

2. Sea f la función cuadrática $f(x) = x^2$.
   a. Determina la ecuación de la función compuesta "$f \circ f$".
   b. Conjetura: ¿Qué función resulta si se compone una función f con su función inversa f^{-1}? Argumenta con la metáfora de "máquina".
   c. Elige pares de funciones f y f^{-1}, compone y compara los resultados con la actividad anterior.

MODELANDO LA OFERTA Y DEMANDA

1. De acuerdo con su experiencia y la información que ha recabado a lo largo de los años, Alex ha determinado que las funciones de oferta y demanda de las cómodas que él produce y vende son las siguientes:

$$O(p) = 60\,000p - 230\,000$$
$$D(p) = -3\,000p + 220\,000$$

   a. ¿Que podría representar p en ambas funciones?
   b. ¿Qué información entregan la función oferta y la función demanda? ¿Qué representan las funciones $D(p)$ y $O(p)$?

2. Grafica ambas funciones en un plano cartesiano. Puedes usar alguna herramienta digital, graduando adecuadamente los ejes.

3. ¿Cómo se interpreta el punto de intersección de las rectas?

4. Encuentra el punto de intersección de las rectas de forma algebraica.
   a. ¿Qué relación se da entre ambas funciones para encontrar el punto de intersección de las rectas?
   b. Otra forma de resolverlo es restar ambas funciones. Opéralas de esta forma y compara con tu respuesta anterior.

5. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

$$Q(x) = -50 + 1{,}5p$$
$$D(x) = 600 - p$$

   a. Calcula el precio y la cantidad para tener equilibrio en el mercado.
   b. ¿A qué precio se producirá una escasez de 100 unidades?

6. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:

$$Q(x) = -200 + \frac{1}{4}p^2$$
$$D(x) = 520 - \frac{1}{5}p^2$$

   a. ¿Cuál es la cantidad para el equilibrio?
   b. Si el fabricante desea poner un precio de \$50 al producto, ¿qué cantidad de producto demandará el mercado?

MODELANDO EL PRECIO DE BIENES

1. Para conocer los costos por la producción de las cómodas, Alex estima algunos gastos y concluye que si el costo por una cómoda es \$100 000, puede reducir el gasto por dos cómodas y costarían \$198 000; tres cómodas tendrían un costo de \$294 000, y así sucesivamente.
   a. Completen la tabla.

Tabla 1: Tabla de valores. Relación entre costos y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Costo $C(x)$	100 000	198 000	294 000						

2. Trabajando en grupo con alguna herramienta digital (Excel), encuentren la curva que mejor aproxima la función entre x y $C(x)$.
   a. Distribúyanse las siguientes tareas:
   - Ingresar los datos anteriores en una tabla de dos columnas; la primera corresponde a la cantidad de cómodas y la segunda, a los costos.
   - Insertar un gráfico de dispersión.
   - Describir de manera general la forma de esta gráfica.
   - Agregar la línea de tendencia, usando la opción de tendencia “polinómica”.

   b. ¿Qué función es la mejor aproximación a los datos presentados?

3. Interpreten esta función en el contexto del costo de producción de x unidades.
   a. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de unidades de cómodas deja de aumentar el costo? ¿Qué sentido tiene?
   b. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

4. Respecto del precio que debe cobrar, Alex estima que debe hacer un descuento a medida que aumentan las unidades solicitadas. Descuenta un 1% por cómoda, desde la compra de dos de ellas en adelante. No se hace descuento por comprar solo una.
   a. Completen la tabla.

Tabla 2: Tabla de valores. Relación entre precio y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Precio $P(x)$	200 000	396 000	588 000			1 800 000			

5. En Excel, encuentren la curva que mejor aproxima la función entre $P(x)$.

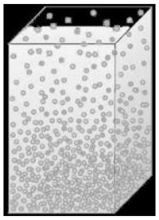
6. Interpreten esta función en el contexto del precio de venta de x unidades.
   a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   b. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de cómodas deja de aumentar el precio de venta? ¿Qué sentido tiene?
   c. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

7. ¿Cómo pueden determinar los ingresos de Alex solo por estas cómodas, según la cantidad de unidades producidas y vendidas?
   a. ¿Qué operación matemática pueden realizar entre $P(x)$ y x para obtener los ingresos?
   b. Muestren la operación y el modelo $I(x)$ obtenido en a.
   c. Grafiquen la función $I(x)$.
   d. Interpreten la función de acuerdo con el contexto.

8. ¿En qué valor de x Alex no gana ni pierde dinero entre la producción y la venta de cómodas?

9. ¿En qué valores de x Álex gana lo máximo posible?

MODELANDO LA PRESIÓN DEL AIRE



Subiendo por 1km sobre el nivel del mar, la presión del aire siempre decrece aproximadamente en un 10% en comparación con la anterior. Al nivel del mar, la presión del aire tiene un valor de aproximadamente $P_0 = 1\ 000\ hP$ (*hecto Pascal*).

a. Elaboren la ecuación de la función exponencial que representa la disminución de la presión del aire en intervalos de 1km de altura.
b. Determinen la presión del aire en la cima del "Ojos del Salado" (6 893m) y al nivel del Mar Muerto (-430m).
c. En la subida de una carretera a la montaña, el altímetro integrado en un auto de aventura muestra una presión de $714hP$. ¿En qué altura se encuentra el auto?
d. Desarrollen la fórmula que modela la altura según la presión del aire.
e. Grafiquen ambas funciones en diferentes sistemas de coordenadas, utilizando alguna herramienta digital.
f. ¿Con qué base de la función exponencial es constante la presión del aire? Representen la validez de la conjetura sobre un gráfico.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Comparan funciones y sus funciones inversas, utilizando diferentes representaciones.			
Describen funciones y sus inversas, utilizando características de simetría o asimetría.			
Verifican la correspondencia entre funciones y sus inversas, utilizando gráficos y procedimientos algebraicos.			
Representan funciones y sus inversas de forma manual o con herramientas digitales.			
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.			
Explican el significado de las variables dependientes e independientes de funciones y sus inversas.			
Varían parámetros para evaluar la pertinencia de modelos basados en una función y su inversa.			
Determinan de forma algebraica la adición, sustracción y multiplicación de funciones.			
Determinan de forma algebraica la inversa y la compuesta de funciones.			
Resuelven un problema, utilizando la intersección de rectas y de curvas.			
Determinan dominio y recorrido de funciones y dan sentido a las restricciones según un contexto.			
Evalúan modelos basados en funciones para tomar decisiones.			