Actividad de Evaluación

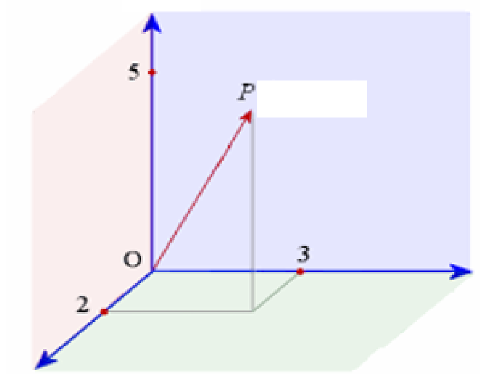
Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales. OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D. • Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D. • Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos. • Representan gráficamente en el sistema de coordenadas 3D, ecuaciones vectoriales de rectas y planos. • Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio. • Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y entre un plano cualquiera con los planos *XY*, *XZ* e *YZ.* • Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que los alumnos trabajen colaborativamente en algunas, a fin de que discutan y propongan estrategias para llegar a la o las soluciones posibles.

Los jóvenes tienen que ubicar ejes y coordenadas de vectores posicionales asignados a puntos, en el sistema cartesiano 3D de coordenadas.

1. Determina las coordenadas del punto P y su vector posicional.



   a. Marca ahora los puntos $R(-2;\ 6;\ 8)$ y $S(5;\ 3;\ 1)$.

b. Determina el vector $\overrightarrow{RS}$, que traslada el punto R al punto S, y además el vector $\overrightarrow{SR}$.

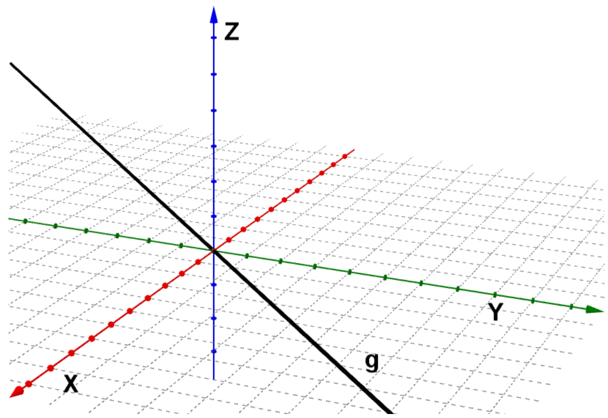
c. ¿Qué tienen en común los vectores $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{SR}$ y en qué difieren?

d. ¿En qué plano se ubica el punto que tiene el vector posicional $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

2. Posición de rectas y planos especiales.

a. Determina un vector director de una recta f que tiene la dirección del eje X.

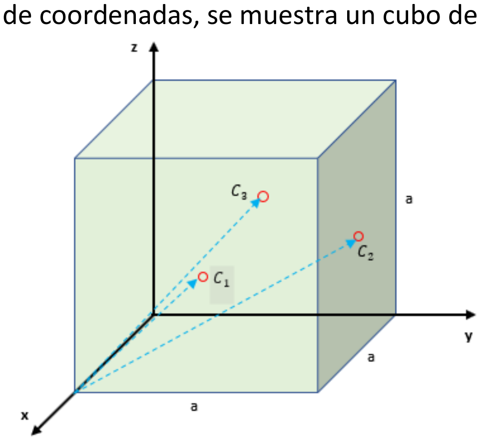
b. Determina un vector director de una recta g que tiene la dirección de una bisectriz entre los ejes horizontales.



c. Si $a, b \in \mathbb{R}$, ¿cuál sería la ubicación del plano E con el punto $P(0;\ 0;\ a)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Haz un esquema.

d. Verifica lo anterior, determinando la ecuación del plano E con $P(0;\ 0;\ 5)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, se muestra un cubo del lado a.

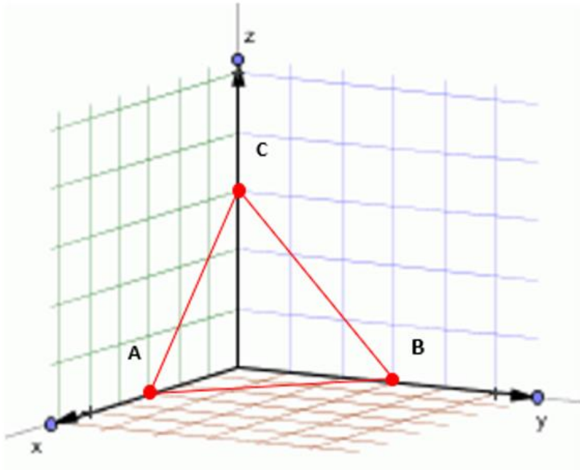


a. C_1, C_2 y C_3 son puntos medios de la cara delantera, la cara lateral derecha y la cara trasera del cubo. Representa los vectores posicionales $\overrightarrow{c_1}$, $\overrightarrow{c_2}$ y $\overrightarrow{c_3}$ de los puntos C_1, C_2 y C_3.

b. Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{C_2C_3}$.

c. Estima el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{c_2}$ y $\overrightarrow{c_3}$. Verifica el resultado con alguna herramienta digital o de forma manual.

4. Considerando $a \in \mathbb{R}$, se marcó los puntos $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$ y $C(0;\ 0;\ a)$ en un sistema cartesiano 3D de coordenadas, como muestra la figura.



a. Determina la ecuación vectorial de la recta g que pasa por el origen O del sistema cartesiano 3D y el centro Z del triángulo ABC.

b. Los puntos $A_k(ka;\ 0;\ 0)$, $B_k(0;\ ka;\ 0)$ y $C_k(0;\ 0;\ ka)$, con $k \in \mathbb{R}$, representan el triángulo $A_kB_kC_k$. Argumenta y comunica si la recta de la actividad anterior pasa o no por el centro Z_k del triángulo $A_kB_kC_k$.

5. Reflexión de un punto del espacio en un plano (simetría especular).

a. Refleja el punto $P(5;\ 2;\ 3)$ en el $plano\ xy$. Verifica el resultado con GeoGebra 3D.

b. Refleja el punto $R(2;\ 6;\ 4)$ en el plano xz. Verifica el resultado con GeoGebra 3D.

c. Refleja el punto $R(2;\ 6;\ 4)$ en un plano paralelo al plano xz que contiene el punto $S(0;\ 1;\ 0)$. Verifica el resultado con GeoGebra 3D.

d. Refleja el punto $Q(3;\ 3;\ 0)$ en el plano E con la ecuación cartesiana de $E: 3x + 2y + z = 8$.

Se recomienda el trabajo grupal en los próximos ejercicios.

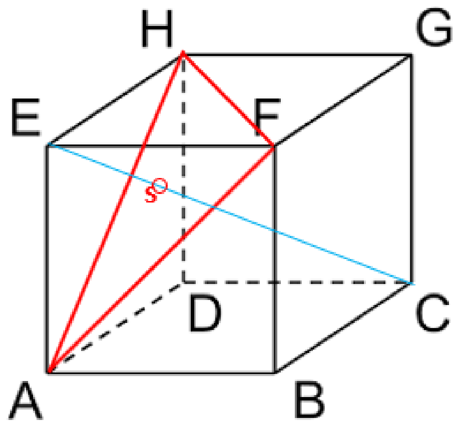
1. Determinen tres planos diferentes que contengan una recta g_0 en común y los puntos $P_0(2, 3, 4)$ y $Q_0(-2, 1, 4)$. Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.

2. En un sistema cartesiano 3D de coordenadas, un cubo tiene los vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(-a, a, 0)$ y $E(0, 0, a)$. Los puntos A, F y H determinan un plano M y los puntos E y C determinan una recta g.

a. Determinen una ecuación vectorial del plano M y de la recta g.

b. La recta g intersecta el plano M en el punto S. Determinen las coordenadas del punto S.

c. Verifiquen el resultado de S mediante herramientas digitales como GeoGebra para $a = 8$.



3. Intersección de rectas con planos.

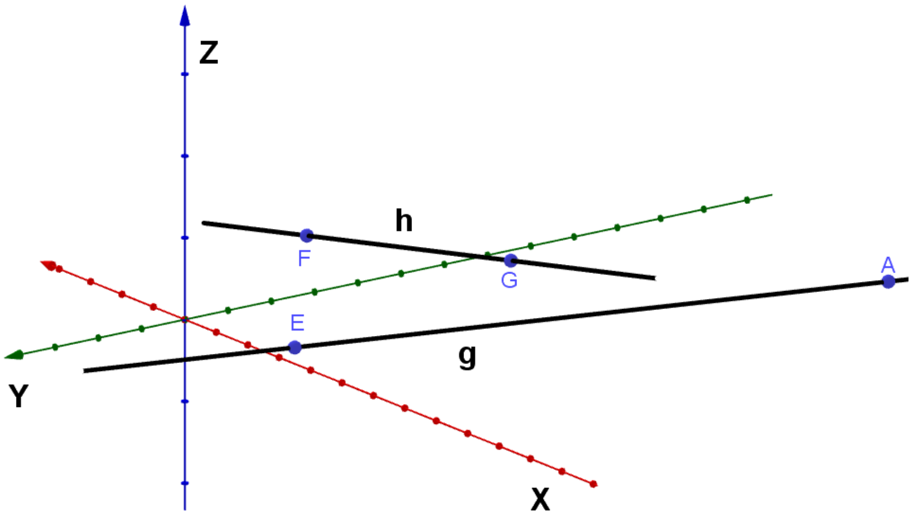
   a. Determinen la intersección entre la recta g y el plano E que tienen las siguientes ecuaciones vectoriales: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$, y $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$. Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.

   b. Encuentren la intersección del plano $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $k, l \in \mathbb{R}$, con los tres ejes de coordenadas. Denominen los puntos con S_x, S_y y S_x. Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.

4. Distancia entre rectas en el sistema coordenado 3D.

   a. Consideren las rectas de ecuaciones g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, y h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$**.** Dichas rectas no se intersectan, pero sí se cruzan en el sistema coordenado 3D.

b. Grafica cada una en GeoGebra 3D.



c. Propongan una estrategia para establecer a qué distancia vertical están separadas.

5. Distancia d entre un punto Q, perteneciente a una recta g, y un plano H.

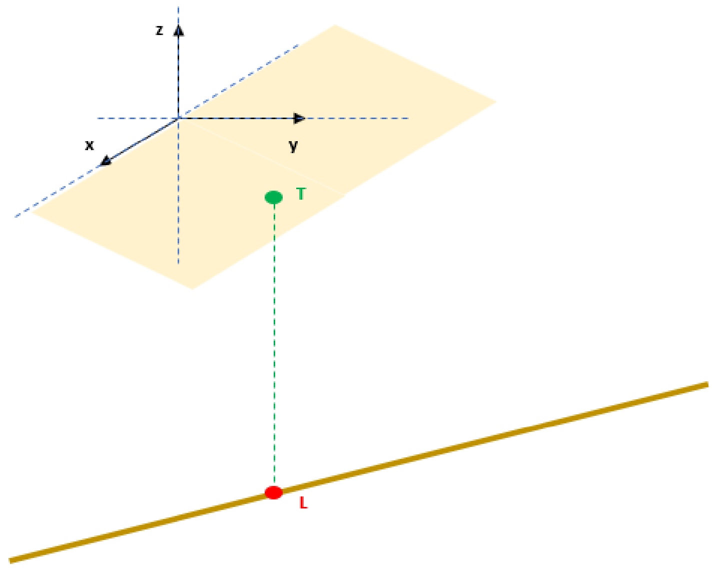
a. Expliquen los pasos para determinar la distancia d.

b. Verifiquen que el punto $Q(3,1,1)$ pertenece a la recta g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

c. Determinen la distancia entre el punto Q y el plano $E\colon 2x + 10y + 11z = 252$.

EL RESCATE DE LOS 33

En situaciones de rescate en minería, como ocurrió en Chile en el año 2010 con los “33”, se necesita maquinaria de perforación del suelo de alta precisión. El sistema “**R**otary **V**ertical **D**rilling **S**ystem” (**RVDS**), que significa “sistema de taladro vertical”, cumple con esta exigencia. En esta actividad, se modela con geometría 3D una situación similar al rescate de “los 33”, con los siguientes supuestos de simplificación y unos pasos propuestos del procedimiento.



1. En referencia al sistema cartesiano 3D, el lugar L está a 700 m de profundidad. La posición horizontal está a 200 m al oeste y a 300 m al sur. La dirección geográfica de norte a sur está representada por el eje y. La perforación del pozo de rescate se debe realizar exactamente en dirección vertical.
    a. Determinen las coordenadas de la torre del taladro en el punto T.
    b. Determinen la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos T y L.
2. Se supone una tolerancia de 0,5% de la exactitud en la desviación del taladro de la dirección vertical.
    a. Determinen el vector director $\vec{v}$ de la recta (y del taladro) que pasa por el punto T, suponiendo una desviación en dirección del eje x.
    b. Determinen el lugar $L´$ en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
3. El sistema "RVDS" utilizado en el rescate de "los 33" tiene más exactitud, con una tolerancia de 0,05% de desviación.
    a. Determinen el vector director $\vec{u}$ de la recta (y del taladro) que pasa por el punto T, suponiendo una desviación en dirección del eje y.
    b. Determinen el lugar $L´´$ en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
4. Suponiendo una desviación de 0,05% en cualquier dirección horizontal, ¿cuál podría ser el lugar físico de los posibles puntos en los cuales el taladro perfore el plano en 700 m de profundidad?
    a. Argumenten y comuniquen las respuestas.
    b. Determinen cuatro puntos que pertenecen a este lugar.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros Completamente logrado	 Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	 No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.			
Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.			
Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.			
Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.			
Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.			
Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos *XY*, *XZ* e *YZ.*			
Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.			