

Unidad 2: Rectas y planos en el espacio

Propósito

Los estudiantes desarrollan su imaginación espacial con una mayor abstracción acerca de situaciones espaciales, y reconocen qué conceptos geométricos se mantienen desde la geometría 2D a la geometría 3D. Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos, en el sistema cartesiano espacial de coordenadas. Determinan la intersección entre rectas y también entre planos, y transforman de la representación vectorial a la representación cartesiana. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿Cómo se interpreta una situación representada por una recta en el plano? ¿Qué situaciones se puede representar a partir de las posiciones relativas entre una recta y un plano del espacio?

Objetivos de Aprendizaje

OA 2.

Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actividad 1: De la geometría plana a la geometría espacial

PROPÓSITO

Los estudiantes amplían sus conocimientos y habilidades desde la “geometría plana” hacia la “geometría espacial”, y reconocen que se mantienen los conceptos geométricos como ejes, coordenadas y vectores. Además, se espera que utilicen las herramientas disponibles para aumentar su imaginación espacial, resolver problemas y abstraer situaciones espaciales mediante coordenadas en tres dimensiones. Pueden emplear las herramientas y conocimientos disponibles para resolver problemas en el espacio, con énfasis en problemas técnicos que requieren de la posición vectorial, como la posición de objetos en el aire, la tierra o bajo el mar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

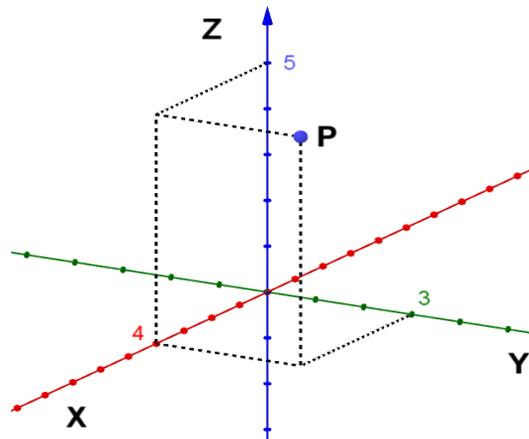
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

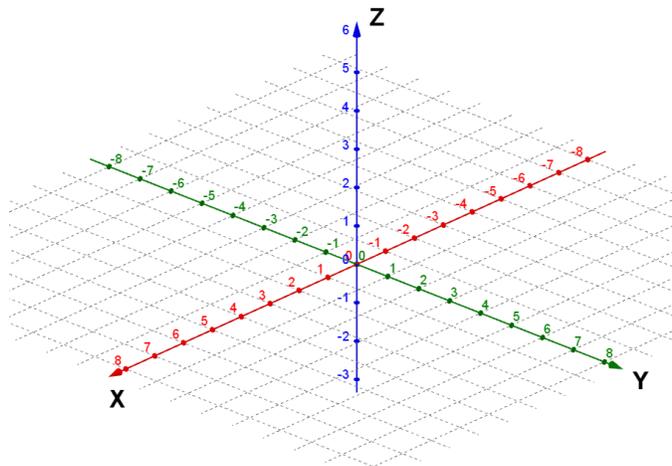
REPRESENTAR PUNTOS Y VECTORES EN EL SISTEMA CARTESIANO 3D

Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo se representa los puntos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?
 - a. Señala cuáles son las coordenadas del punto P en el gráfico. Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación en el formato " $P = (x; y; z)$ ".

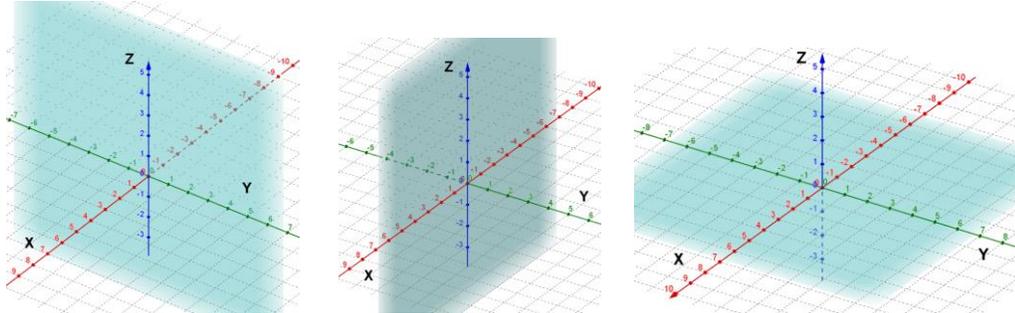


- b. A continuación, ubica los puntos $A(-4; 3; -5)$, $B(2; -7; 8)$, $C(8; 0; 2)$ y $D(-8; 2; -1)$. Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación de cada punto, según el formato " $P = (x; y; z)$ ".



2. ¿Cómo se identifican los planos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

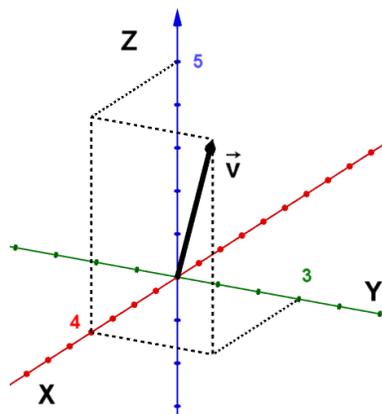
- a. Rotula en el sistema cartesiano de coordenadas 3D en las figuras de abajo: ¿cuáles son el “plano xy ”, el “plano xz ” y el “plano yz ”? Verifica tus elecciones, usando GeoGebra 3D y la herramienta “Plano” para seleccionar dos rectas (en este caso, los pares de ejes involucrados).



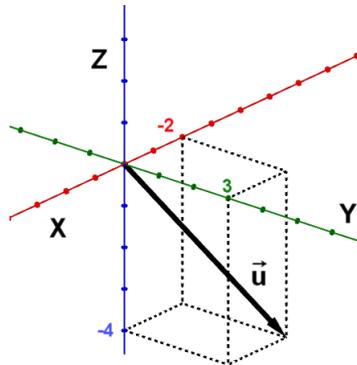
- b. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma $P(0; 0; a)$, $Q(b; 0; 0)$ y $R(0; c; 0)$, donde a , b y c son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $P = (0; 0; -2)$ ”.
- c. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma $M(a; 0; a)$, $N(b; b; 0)$ y $O(0; c; c)$, donde a , b y c son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $M = (1; 0; 1)$ ”.

3. ¿Cómo se representan los vectores en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

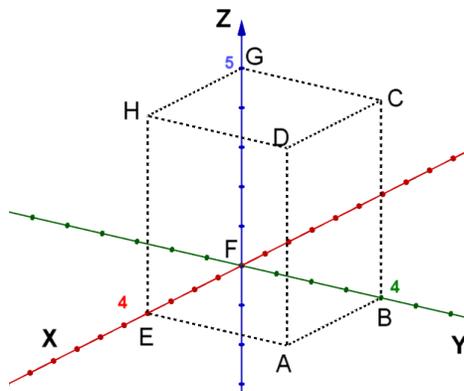
- a. Usando la forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, representa el vector \vec{v} según lo que se muestra en la figura. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.



- b. Representa el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en forma de una columna de coordenadas. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.



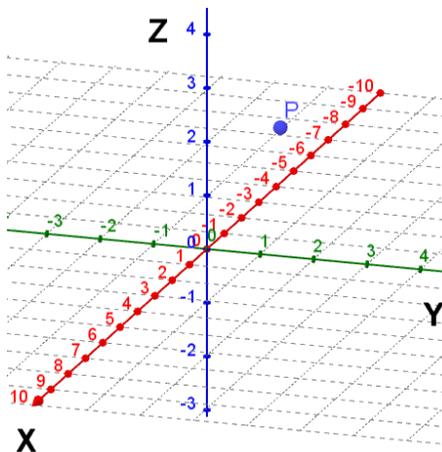
4. En la siguiente figura, el paralelepípedo recto rectangular tiene los vértices A, B, C, D (cara frontal delante) y E, F, G, H (cara frontal detrás).



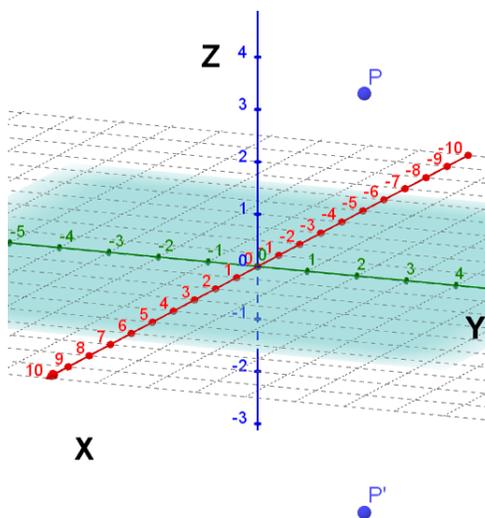
- Identifica los vectores posicionales de los vértices y preséntalos acorde al formato $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.
- Determina los vectores que se puede asociar a las diagonales de las caras del paralelepípedo. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D. ¿Coinciden algunos de estos vectores con los establecidos en a.? ¿Por qué?
- Determina aquellos vectores en el paralelepípedo que se puede asociar a diagonales que no pertenezcan a las caras. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS POR MEDIO DE UN SISTEMA 3D DE COORDENADAS

1. ¿Cómo reflejar puntos por medio de planos en el sistema de coordenadas 3D?
 - a. Define las coordenadas de un punto P ; por ejemplo: $P = (2; 3; 4)$. Utiliza GeoGebra 3D para hacerlo.

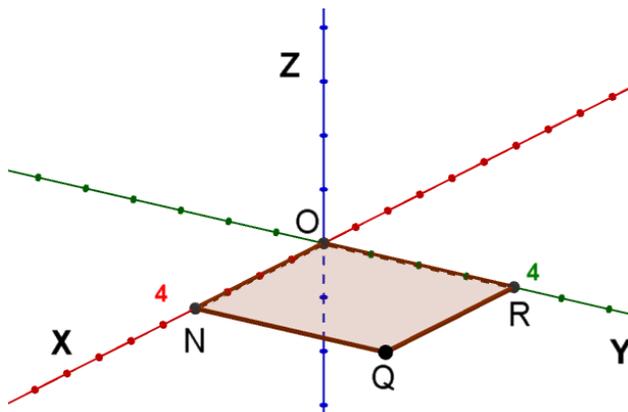


- b. Ahora refleja el punto P respecto del plano xy . Usa primero la herramienta “Plano por dos rectas” para definir el plano xy , marcando el eje X y el eje Y . A continuación, utiliza la herramienta “Simetría especular”. Marca el punto P y luego el plano xy definido para obtener el punto reflejado P' . ¿Cuáles son las coordenadas del punto P' imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas respecto de P ?



- c. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto P en el plano yz . ¿Cuáles son las coordenadas del punto P' imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?
 - d. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto P en el plano z . ¿Cuáles son las coordenadas del punto P' imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?

2. ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en el sistema de coordenadas 3D? Considera el siguiente rectángulo $ONQR$.



- Traslada el rectángulo $ONQR$ por medio del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. ¿Cuáles son las coordenadas del rectángulo trasladado o imagen $O'N'Q'R'$? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “traslación”.
- Rota el rectángulo $ONQR$ 90° en sentido “antihorario” en torno al segmento NO . ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen $O'N'Q'R'$? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “rotación axial”.

SITUACIONES DE LA VIDA DIARIA Y EL SISTEMA 3D DE COORDENADAS

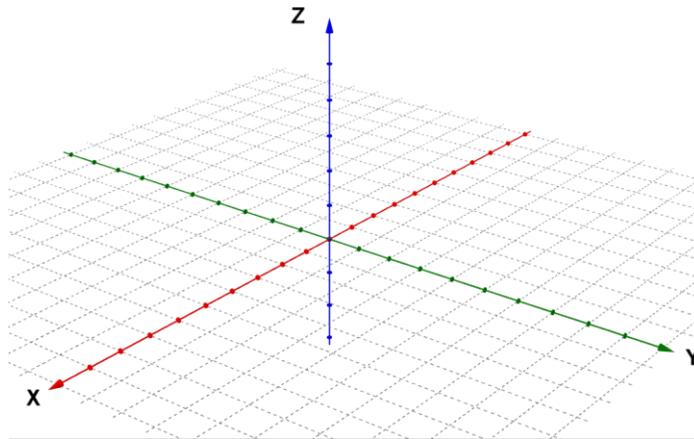
- La torre de control de vigilancia aérea, ubicada en un cerro de la ciudad y operada por drones, tiene en su interior el origen de un sistema de coordenadas espaciales 3D, donde la dirección al norte representa el eje de coordenadas Y. El eje X representa la dirección de oeste al este, y el eje Z representa la dirección vertical hacia arriba. Las coordenadas corresponden a la unidad de metros.



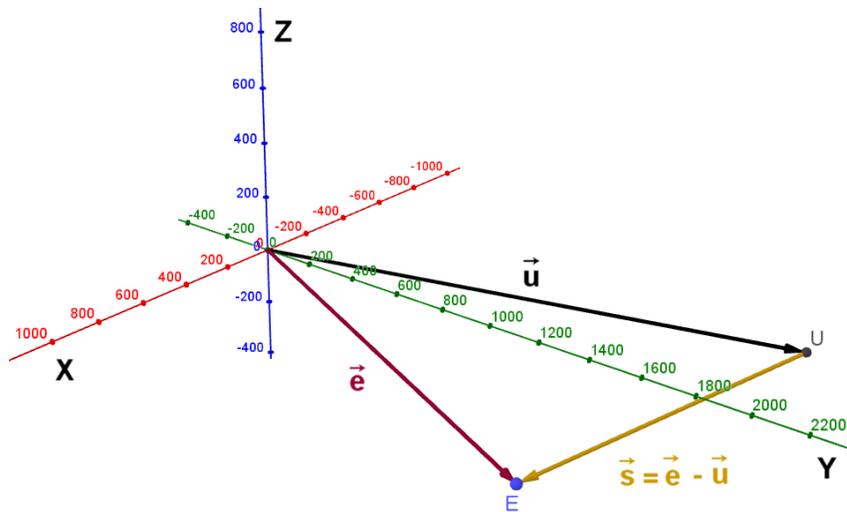
- En una situación de emergencia, el dron estaba en la ubicación $U(-300; 2\ 000; 100)$ y el lugar E de la emergencia tiene las coordenadas $E(500; 1\ 500; -200)$.

Conexión
interdisciplinaria:
Ciencias para la
Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio

- a. Representa la situación en un sistema de coordenadas 3D, de modo que te permita modelar de manera más sencilla. Utiliza una escala conveniente según los datos del problema y señala claramente los puntos cardinales.



- b. Representa las ubicaciones de U y E mediante sus vectores posicionales.
 c. Determina el vector \overrightarrow{UE} asignado al traslado directo del dron al lugar de emergencia.



3. Representa la dirección del vector \overrightarrow{UE} mediante un vector \vec{s} en forma simplificada, con coordenadas de un dígito.
 4. En otra situación, imagina que el dron se dirige desde su posición actual del lugar de emergencia (E) a una nueva dirección (A), representada por el vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determina el vector \overrightarrow{EA} de traslado.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere recordar a los estudiantes que los vectores son un conjunto de puntos y muestran la traslación desde un punto del espacio hasta otro. Por esta razón, las coordenadas de un vector se representan en forma de una columna, en la cual la coordenada superior muestra las unidades de la traslación en dirección X, la coordenada central representa las unidades de traslación en dirección Y, mientras la coordenada inferior considera la traslación en dirección Z.
2. Para acostumbrarse a reconocer objetos según una ubicación tridimensional, se recomienda dibujar puntos y sus vectores posicionales, utilizando líneas punteadas paralelas a los ejes de coordenadas.
3. Se sugiere trabajar con los jóvenes en cómo identificar puntos particulares con dos coordenadas o una de ellas de valor "0", para fomentar aún más la comprensión espacial.
4. A partir de las actividades, se transfiere el concepto de traslaciones o de reflexiones, que ya conocen en la geometría del plano, lo que ayuda a aumentar el manejo de movimientos en el espacio. En general, se transfiere conceptos de la geometría 2D a la geometría 3D para aumentar la imaginación espacial.
5. Conviene usar contextos aplicados como el desplazamiento de drones, pues implica describir en detalle movimientos según coordenadas y vectores, incluyendo posiciones de reposo en el aire, con lo cual se puede modelar situaciones de vigilancia aérea.
6. Cabe precisar que, para las situaciones en contextos de ubicación, se elige el eje X en correspondencia al sentido de la rotación propia de la Tierra (del oeste al este) y la dirección Y correspondiente a la dirección y orientación (al norte) de mapas geográficos. Para la orientación del eje Z, se considera natural elegir la perpendicular hacia arriba.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.
 - Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.
 - Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Coordenadas cartesianas
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.disfrutalasmaticas.com/graficos/coordenadas-cartesianas.html>
- Sistema de coordenadas en el espacio
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://navarrof.orgfree.com/Docencia/MatematicasIV/UT1/sistemas_de_coordenadas.htm

Actividad 2: Rectas y planos en el espacio

PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes caractericen planos y rectas en el sistema 3D mediante sus diferentes ecuaciones y los representen gráficamente en forma manual y con herramientas digitales. Además, se espera que modelen situaciones mediante intersecciones de rectas y de planos, y que trabajen colaborativamente para resolver problemas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

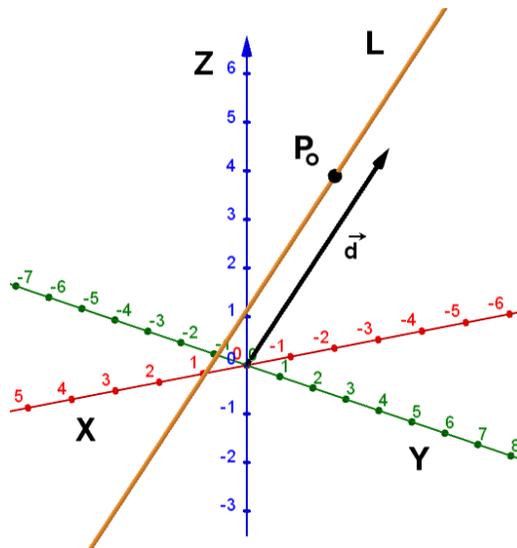
ECUACIONES VECTORIALES DE RECTAS EN EL ESPACIO

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Considerando un punto $P_0(1, 4, 5)$ de una recta L y un vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, determinen una ecuación vectorial de la recta L .
 - a. Ingresen el punto $P_0 = (1; 4; 5)$ en GeoGebra 3D.
 - b. A continuación, definan el punto $D = (-1; 3; 5)$.
 - c. Establezcan ahora el vector \vec{d} asociado al punto D como “Vector (D)”.

- d. Usando la herramienta “recta paralela por un punto y según dirección de un vector” de GeoGebra 3D, determinen la recta L que pasa por $P_0 = (1; 4; 5)$ y que sea paralela al vector \vec{d} .

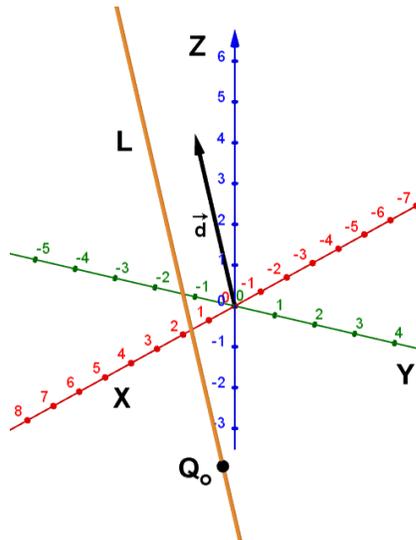


- e. ¿Cuál es la ecuación que GeoGebra 3D asigna a L ? Completen:

$$(x; y; z) = (\quad ; \quad ; \quad) + \lambda (\quad ; \quad ; \quad)$$

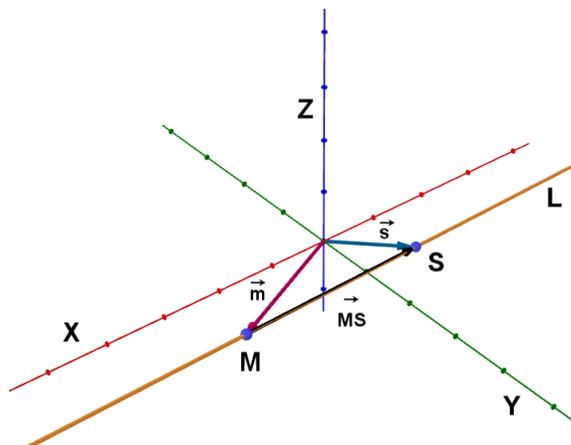
- f. ¿Qué representa el factor λ asociado al vector director \vec{d} ? Discutan en el grupo y argumenten la respuesta.

2. Según lo anterior, ¿cuál sería la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q_0(2; 1; -3)$ de una recta L y un vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$? Completen $(x; y; z) = (\quad ; \quad ; \quad) + \lambda (\quad ; \quad ; \quad)$ y comprueben con GeoGebra 3D.

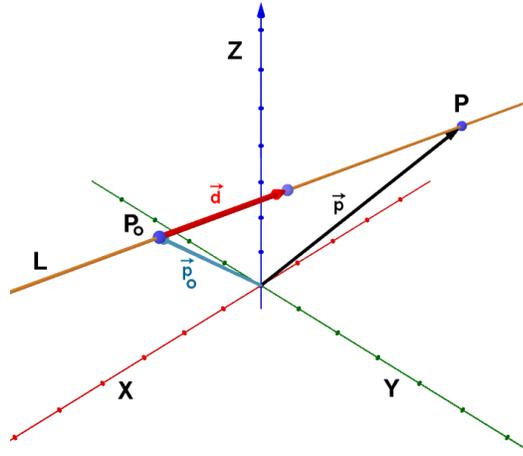


3. ¿Cuál sería la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $M(3; 2; 1)$ y $S(-1; 1; 0)$?
- Determinen las coordenadas del vector \overrightarrow{MS} . Discutan la forma de hacerlo.
 - Tomen como vector director \overrightarrow{MS} y uno de los puntos; por ejemplo: $M(3; 2; 1)$.
 - A continuación, anoten la ecuación vectorial de la recta:

$$(x; y; z) = (\quad ; \quad ; \quad) + \lambda (\quad ; \quad ; \quad)$$
 - Comprueben su resultado con GeoGebra 3D. Consideren los vectores posicionales para $M(3; 2; 1)$ y $S(-1; 1; 0)$. Discutan cómo, en el gráfico, el vector director \overrightarrow{MS} coincide en dirección con la recta L y cómo este vector se define a partir de los vectores posicionales de M y S .



4. Desarrollen la ecuación vectorial de una recta en el espacio, según la imagen de abajo. Discutan en el grupo y argumenten la forma en que la hicieron.



- a. Con la recta L , el punto fijo $P_0(x_0; y_0; z_0)$, el vector director definido $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ y el punto $P(x; y; z)$, que resulta cuando se da un cierto valor al parámetro λ , determinen en general la ecuación vectorial de la recta L :

$$(x; y; z) = (\quad ; \quad ; \quad) + \lambda (\quad ; \quad ; \quad)$$

$$P = \underline{\hspace{2cm}} + \lambda \underline{\hspace{2cm}}$$

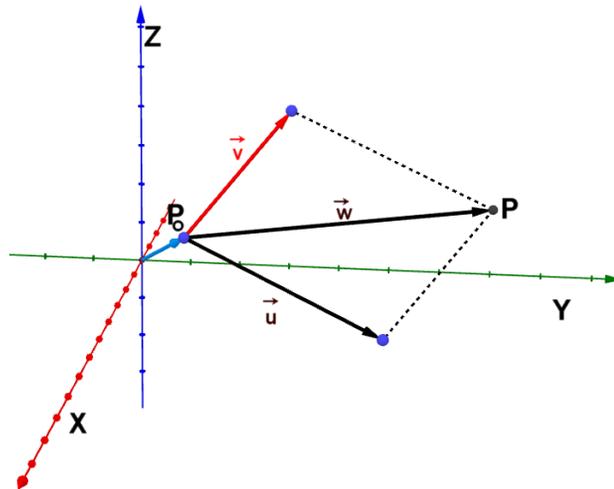
- b. Con referencia a la imagen anterior, ¿cuál es aproximadamente el parámetro λ mediante el cual se logra la traslación del punto P_0 al punto P ? En otras palabras, ¿por cuánto hay que multiplicar al vector director? Discutan en el grupo y redacten su respuesta.
- c. Considerando la ecuación vectorial de la recta L que pasa por el punto $Q_0(1; 4; 5)$ y el vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ¿qué vector posicional \vec{u} de un punto U se genera, reemplazando el parámetro $\lambda = -2$ en la ecuación vectorial de dicha recta L ? ¿Cuáles son las coordenadas del punto U ? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.
- d. ¿Mediante cuál parámetro λ se genera el vector posicional \vec{w} que traslada el punto $Q_0(1; 4; 5)$ al punto $W(-3; 16; 25)$? Argumenten.

ECUACIONES VECTORIALES DE PLANOS EN EL ESPACIO

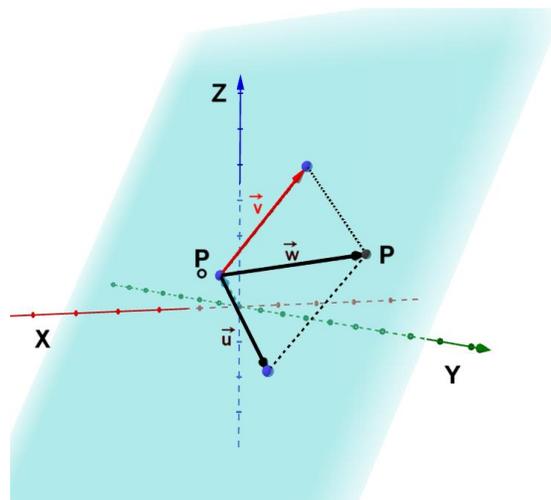
1. Imagina que el punto $P_0(1; 1; 1)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenecen al plano F .

Determinen una ecuación vectorial del plano F . Usen GeoGebra 3D.

- Ubiquen el punto P_0 en el sistema coordenado 3D.
- A continuación, proyecten los vectores \vec{u} y \vec{v} desde el punto P_0 .
- Establezcan la resultante de la suma entre los vectores \vec{u} y \vec{v} .

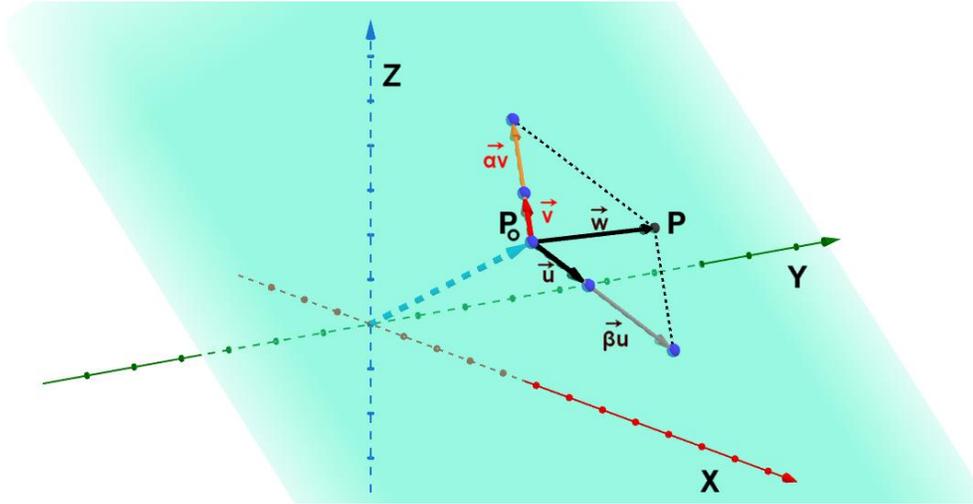


- Marquen el punto P encontrado. ¿Pertenece al Plano F ? Discutan con el grupo. Verifiquen con GeoGebra y la opción "Plano por 3 puntos".

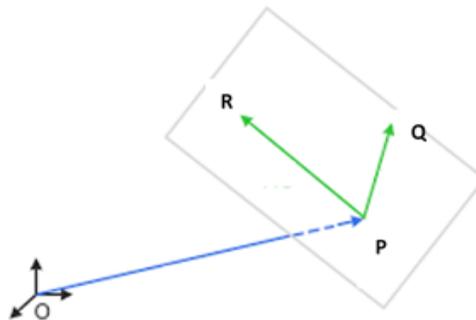


- ¿Qué sucede si se multiplican los vectores por escalares α y β , respectivamente? ¿Qué significan las expresiones $\alpha\vec{u}$ y $\beta\vec{v}$?
- ¿Se podría encontrar otros puntos pertenecientes al mismo plano F ? ¿Por qué?

2. Desarrollen la ecuación vectorial de un plano en el espacio, a partir de un punto P perteneciente al plano y dos vectores de traslación dados, según la imagen de abajo.

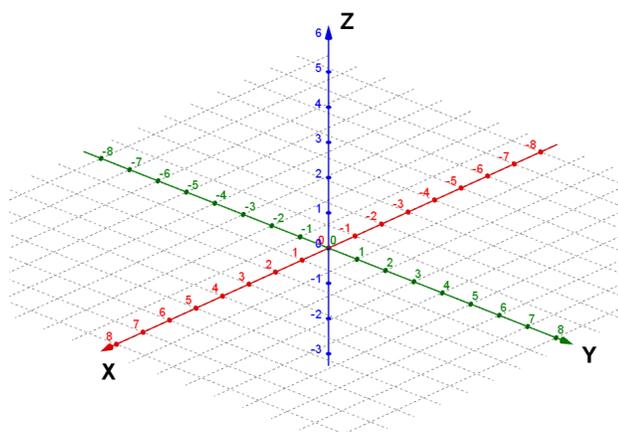


- El punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pertenece a un plano E y los vectores \vec{u} y \vec{v} representan traslaciones de puntos en E . Si un punto cualquiera $P(x, y, z)$ también pertenece al plano E , determinen una ecuación vectorial del plano E a partir de la información anterior.
 - El punto $P(1; 3; 2)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ pertenecen al plano F . Determinen una ecuación vectorial del plano F .
 - Determinen el punto Q del plano F para los parámetros $\alpha = -1$ y $\beta = 2$.
 - Un plano H tiene la ecuación vectorial $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Verifiquen si el punto $A(-1; -3; -1)$ pertenece al plano H .
3. ¿Cómo obtener la ecuación vectorial de un plano en el espacio 3D, a partir de tres puntos que pertenecen a él?



- Desarrollen una ecuación vectorial según la imagen anterior.

- b. Confeccionen un dibujo esquemático con el vector posicional del punto P y desarrollen una ecuación vectorial del plano. Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.
- c. Dados los tres puntos $A(2; 0; 3)$, $B(1; -1; 5)$ y $C(3; -2; 0)$ que pertenecen a un plano E , determinen dos ecuaciones de E con diferentes vectores posicionales elegidos. ¿Es posible hacerlo? ¿Por qué? Discutan con el grupo cómo abordarán el problema.
4. ¿Cómo se obtiene la ecuación vectorial de un plano en el espacio, cuando se tiene tres puntos especiales?
- a. Si a es un número real, razonen acerca de la ubicación de los siguientes puntos en el sistema cartesiano 3D: $A(0; a; 0)$, $B(0; a; a)$ y $C(a; a; 0)$, y describan el plano que determinan.
- b. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, marquen los puntos $K(4; 0; 0)$, $L(0; 4; 0)$ y $M(0; 0; 4)$, y desarrollen una ecuación vectorial del plano E al que pertenecen estos puntos.



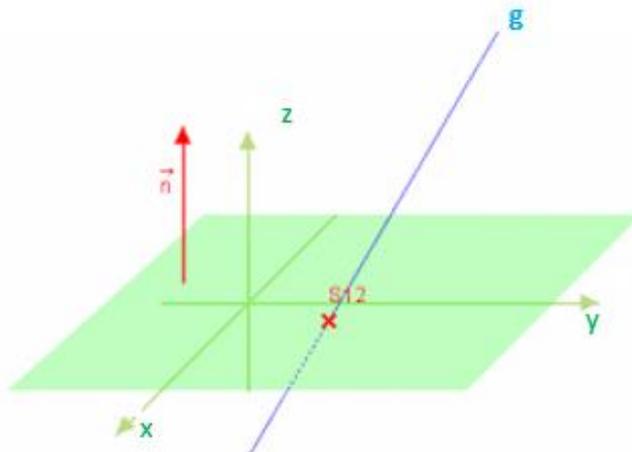
- c. ¿Qué características deberían tener tres puntos P, Q, y R que pertenecen a un plano F paralelo al plano E ? Discutan con el grupo y elaboren una respuesta.

SITUACIONES MODELADAS POR RECTAS Y PLANOS

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en forma grupal.

1. ¿Cómo enfrentar situaciones que involucran planos con características especiales en el sistema cartesiano 3D de coordenadas? Elaboren un dibujo esquemático para cada actividad.
- a. ¿Qué plano representa la siguiente ecuación vectorial? $\vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.
Argumenten la respuesta con una imagen esquemática.
- b. Elaboren una ecuación vectorial de un plano paralelo (no idéntico) al “plano xz” del sistema cartesiano 3D de coordenadas. Expliquen el procedimiento.
- c. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al “plano xy” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de tres unidades. Expliquen el procedimiento.
- d. Elaboren una ecuación vectorial de los dos planos paralelos al plano “yz” del sistema cartesiano 3D, que tengan una distancia de éste de cinco unidades. Expliquen el procedimiento.

2. ¿Cómo determinar intersecciones de rectas con planos paralelos a los “planos de coordenadas”?
¿Qué características poseen estas intersecciones?

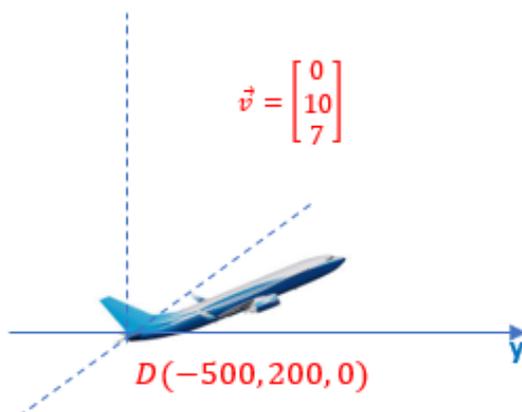


- a. Determinen el punto S de intersección de la recta g con la ecuación $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ y el “plano de coordenadas xy ”. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano en su forma más sencilla).
- b. Determinen el punto T de intersección de la recta g con un plano paralelo al “plano de coordenadas xy ” en la distancia de cinco unidades. (Elaboren la ecuación vectorial de este plano paralelo en su forma más sencilla).
3. Modelar situaciones de seguridad en el transporte aéreo, mediante intersecciones de rectas geométricas con planos geométricos que están paralelos a los “planos de coordenadas”.

En el dibujo esquemático a continuación, se muestra un avión en el momento del despegue. Las coordenadas del punto D del despegue, medidas en metros, se refieren a un sistema de coordenadas cuyo origen O es la torre del aeropuerto. El vector \vec{v} de la dirección del vuelo también se refiere a metros y la dirección del eje y está de norte sur.



a



Conexión
interdisciplinaria:
Ciencias para la
Ciudadanía
OAc, 3° y 4° medio

- En una altura de 3 000 m, el avión pasa las nubes y entra en un espacio aéreo despejado. Determinen este lugar L en referencia al sistema de coordenadas cuyo origen es la torre.
 - En esta fase del vuelo, se considera un movimiento rectilíneo uniforme ("MRU"). ¿Cuál es el largo del desplazamiento al pasar por el punto L ?
 - En otra fase del vuelo, el avión ya está en una altura de 5 000 m y vuela con velocidad constante en una dirección representada por el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. El avión debe pasar por una cordillera de altura máxima de 5 000 m, que se extiende en la dirección norte-sur (paralela al eje y). Como control de altura, la nave debería pasar un plano paralelo al plano yz , que se extiende a una distancia de 3 000m del avión. Pasando este plano, sigue volando horizontalmente en dirección oeste-este.
- ¿Con qué distancia de seguridad, en cuanto a la altura, el avión pasará la cordillera?
 - Confeccionen previamente un dibujo esquemático para representar y resolver el problema.
 - ¿Por qué la intersección de rectas con planos paralelos a los planos de coordenadas debe anteceder a la intersección con planos inclinados?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere tratar las situaciones en detalle y con varios ejemplos, ya que es la primera vez que los jóvenes trabajan de manera integrada con ecuaciones vectoriales de rectas y planos. Conviene que los parámetros usados correspondan a los números reales.
- En cuanto a la contextualización con los vuelos de aviones, las ecuaciones vectoriales geométricas son un modelo de las ecuaciones de movimientos rectilíneos uniformes "MRU".
- Se recomienda emplear herramientas digitales como GeoGebra para que exploren las representaciones que, en general, requieren mucha imaginación espacial. También deben adquirir destreza para confeccionar dibujos esquemáticos, elaborar ecuaciones vectoriales y determinar simbólicamente conjuntos de intersección entre rectas y planos.

4. Para facilitar la elaboración de las ecuaciones vectoriales, se recomienda elegir un sistema de coordenadas en el cual el punto $P(0; 0; 5\ 000)$ representa la posición del avión que debe pasar por plano paralelo al plano yz .
5. Para resolver los problemas por métodos algebraicos, finalmente trabajan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de hasta 3×3 . No obstante, el énfasis está principalmente en el trabajo visual con apoyo de GeoGebra 3D.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.
 - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Ecuación vectorial
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ematematicas.net/eirectaespacio.php?a=6>
- Rectas en espacio de coordenadas 3D
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-en-r3/>
- Ecuaciones de la recta en el espacio
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/ecuaciones-de-la-recta-en-el-espacio.html>
- Tutoriales para trabajar ecuaciones paramétricas de rectas y planos
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=Xu7NsHs9Z9A>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=CkDxFjGOfBg>

Actividad 3: Determinar la intersección de rectas con planos y de planos con planos

PROPÓSITO

Los estudiantes determinan la intersección entre plano y recta y entre dos planos en el espacio, con ecuaciones vectoriales. Reflexionan acerca de la intersección entre dos planos y plano y recta, a partir de las posibilidades del conjunto “solución de sistemas de ecuaciones lineales”. Se espera que usen herramientas digitales para verificar y visualizar los resultados obtenidos mediante el cálculo simbólico y para facilitar la resolución de problemas geométricos más complejos.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

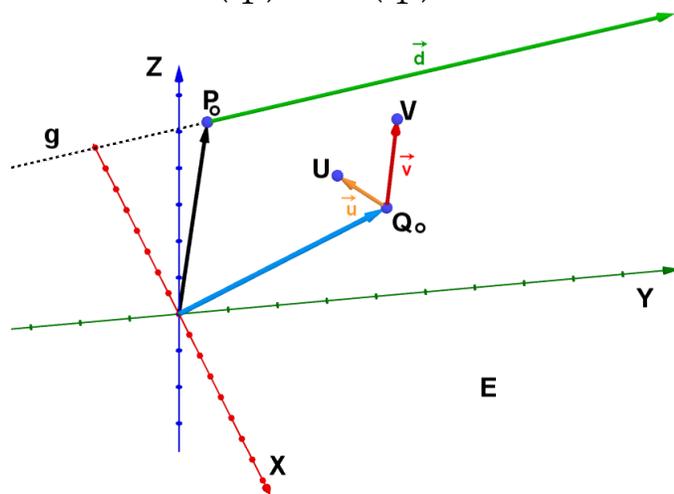
DESARROLLO

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS Y RECTAS

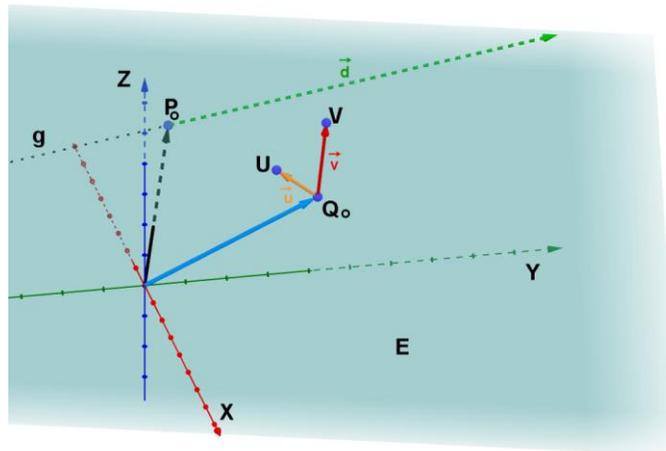
Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo determinar la intersección entre una recta y un plano? Si se tienen las ecuaciones vectoriales de una recta y un plano: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ y $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la intersección entre la recta g y el plano E ? Usa GeoGebra 3D para encontrar esta intersección.

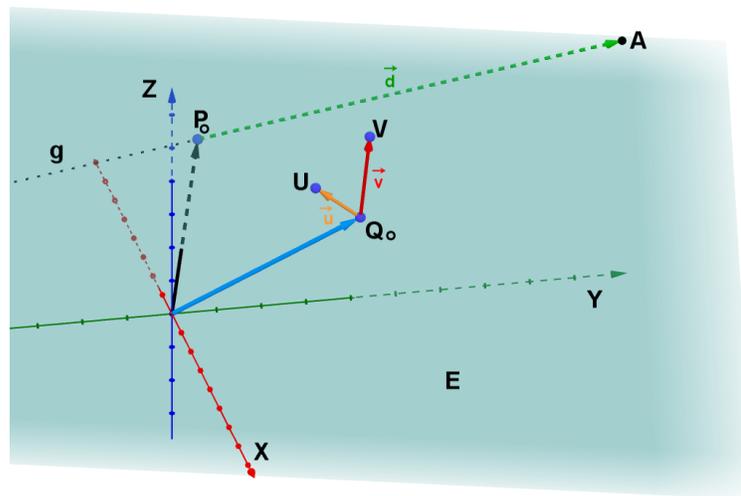
- a. Construye la recta g . Define en GeoGebra 3D el vector posición $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, el vector director $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Obtén la recta g con la herramienta “Recta paralela”, considerando P_0 y \vec{d} .
- b. Construye el plano E . Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



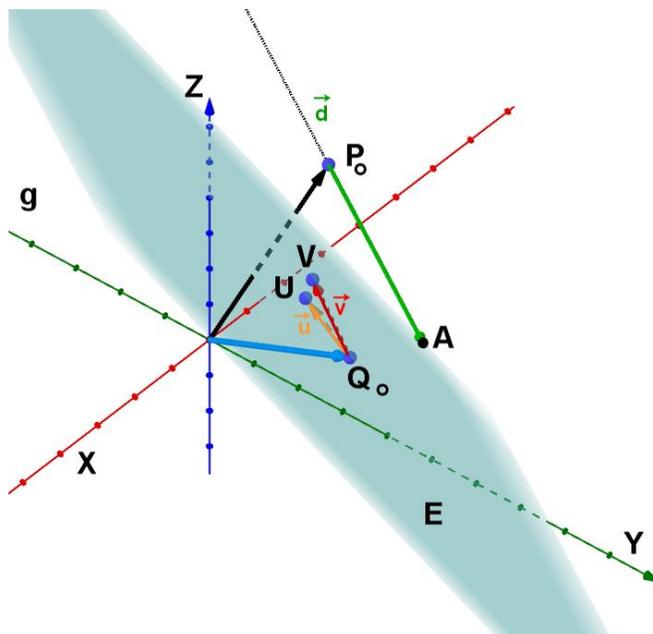
- c. Obtén el plano E con la herramienta “Plano por tres puntos”, considerando U, V y Q_0 .



- d. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano E con la recta g . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos?
- e. Con la herramienta “intersección de objetos”, verifica la intersección de g y E . Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:



- f. Utilizando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, verifica el conjunto solución.



- g. Finalmente, ¿de qué manera se puede encontrar la solución anterior mediante procedimientos algebraicos?

2. Considera ahora que una recta h tiene la ecuación $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ y el mismo

plano anterior $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$.

- Conjetura si la recta h interseca o no el plano E .
 - Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
 - ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
3. Considera que otra recta l tiene la ecuación $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$ y el mismo plano anterior E .
- Conjetura si la recta h interseca o no el plano E .
 - Verifica o rechaza tu conjetura mediante GeoGebra 3D.
 - ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
4. ¿Cómo determinar la intersección de un plano con los ejes de coordenadas? Por ejemplo: encuentra la intersección del Plano $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$, con el eje Y .

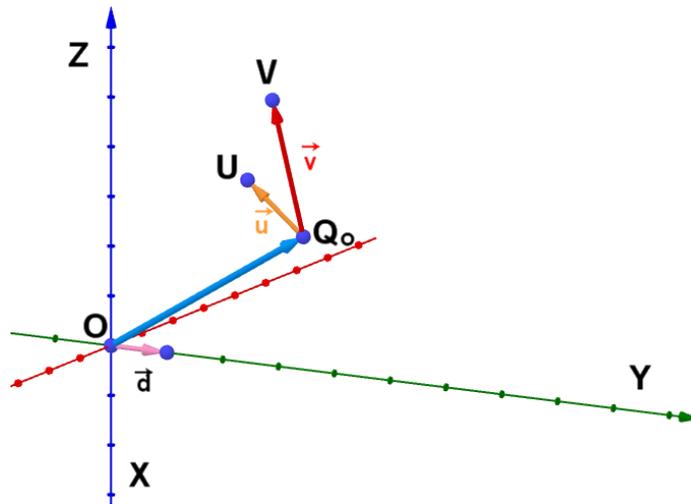
- a. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que representa el eje Y. Identifica el vector posicional y el vector director en este caso:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

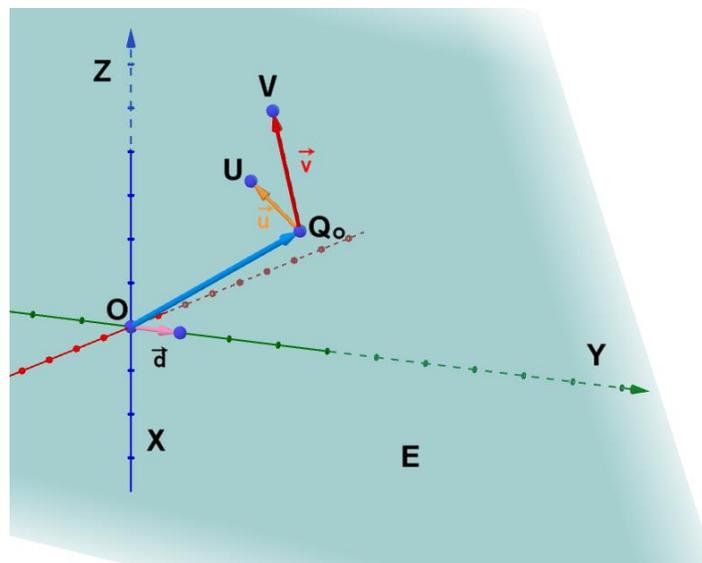
- b. Identifica en GeoGebra 3D, la recta que representa el eje Y.

- c. Construye el plano E . Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir

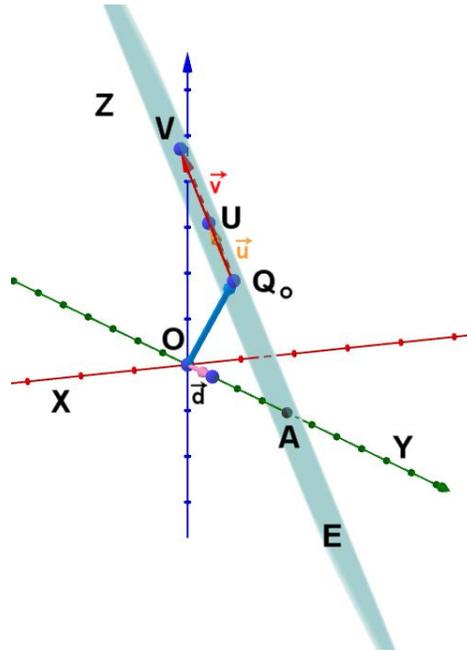
de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



- d. Obtén el plano E con la herramienta "Plano por tres puntos", considerando U, V y Q_0 .



- e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección del Plano E con la recta g . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.
- f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D “intersección de objetos”, verifica la intersección del eje Y con E . Contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el objeto resultado de la intersección:



- g. ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
- h. Encuentra la intersección del plano E con las rectas asociadas a los ejes X y Z . Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

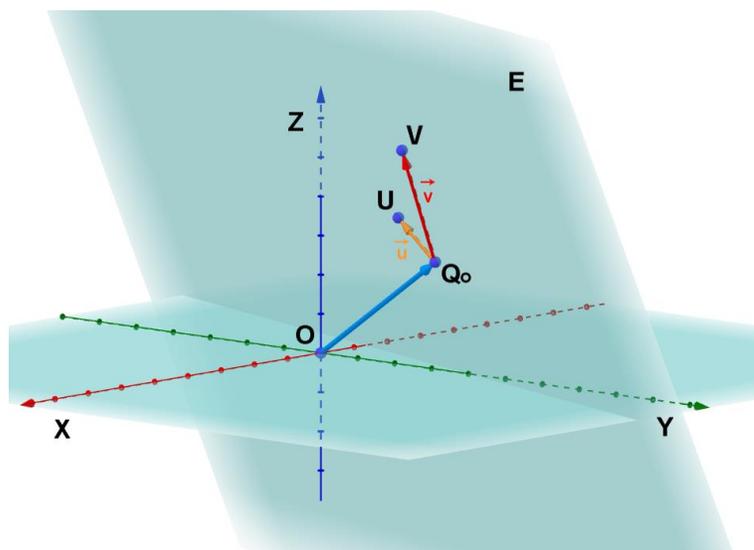
INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS

1. ¿Cómo determinar la intersección entre dos planos? Considera el plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$, y el Plano XY .

- a. Escribe la ecuación paramétrica del Plano XY . Identifica el vector posicional y los dos vectores directores en este caso:

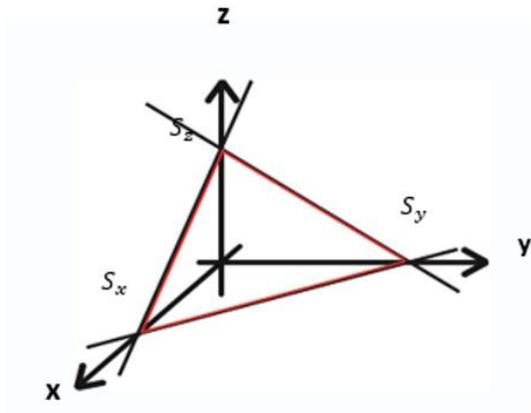
$$\text{Plano } XY: \vec{x} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- b. Construye el plano E . Define en GeoGebra 3D el vector posición $Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- c. Construye el plano XY . Define en GeoGebra 3D el vector posición $O = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ y luego, a partir de éste, los vectores directores $\vec{u} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.
- d. Obtén los planos E y XY con la herramienta “Plano por tres puntos”, considerando los vectores posicionales y los vectores directores.



- e. Explora con GeoGebra 3D, usando la herramienta de “rotación” del sistema coordenado 3D, y conjetura acerca de dónde podría estar la intersección de los planos E y XY . ¿Se trata de un punto o un conjunto de puntos? Argumenta.
- f. Utilizando la herramienta de GeoGebra 3D “intersección de objetos”, verifica la intersección de los planos E y XY y contrasta tu conjetura con el resultado. Anota aquí el conjunto solución:
_____.
- ¿Cómo se puede resolver lo anterior mediante procedimientos algebraicos?
 - Encuentra la intersección del plano E con los otros planos XZ e YZ . Comprueba las soluciones con GeoGebra 3D.

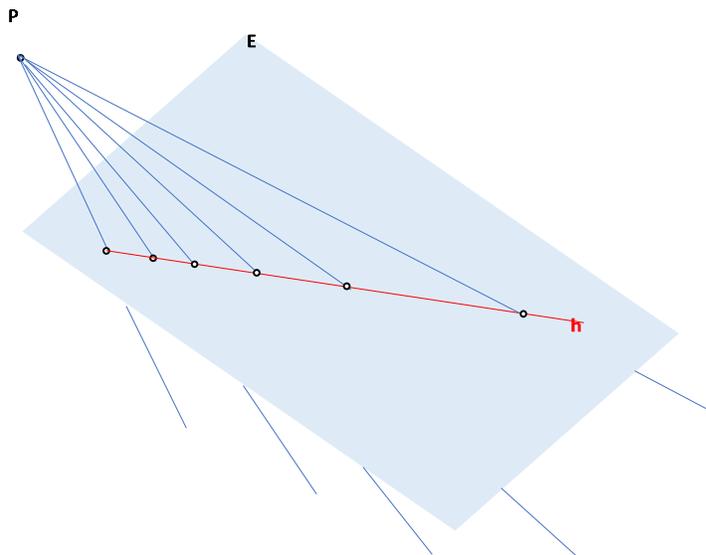
2. Encuentra la intersección del plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{R}$, con cada uno de los planos XY , XZ e YZ , de forma algebraica.



3. Usa algún programa de geometría dinámica para encontrar las soluciones de la intersección del plano $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{R}$, con cada uno de los planos XY , XZ e YZ , y compara con lo obtenido en el ejercicio anterior.

UNA SITUACIÓN CIENTÍFICA DE OCEANOGRAFÍA Y EL HAZ DE RECTAS EN EL ESPACIO

1. Un haz de rectas g_α que pasa por un punto P , intersecciona un plano E en varios puntos. Determinen la recta h que une los puntos de intersección de g_α con E .



Para cada valor del parámetro a , se define una recta g_a mediante la siguiente ecuación vectorial

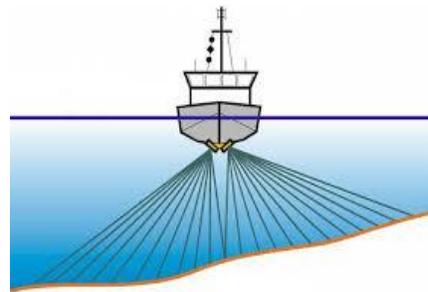
$$g_a: \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 4 + 2a \\ -1 + 5a \\ 1 + 3a \end{bmatrix}; r, a \in \mathbb{R}. \text{ El plano } E \text{ tiene la ecuación vectorial de}$$

$$E: \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } k, l \in \mathbb{R}.$$

Determinen una ecuación vectorial de la recta h que une los puntos de intersección en el plano E . Utilicen alguna herramienta digital como apoyo.

2. Modelar el rastreo del fondo marino, hecho con ecosondas abanicas como se muestra en la imagen adjunta.

Un barco científico está investigando la profundidad del mar para elaborar un mapa que represente el perfil del fondo marino, y que sirva tanto para la pesca como para la navegación. Las ecosondas ubicadas en la parte inferior del barco emiten un haz de rayos ultrasónicos que forman un triángulo espacial. El barco está registrando el borde superior de una fosa submarina en el fondo submarino.

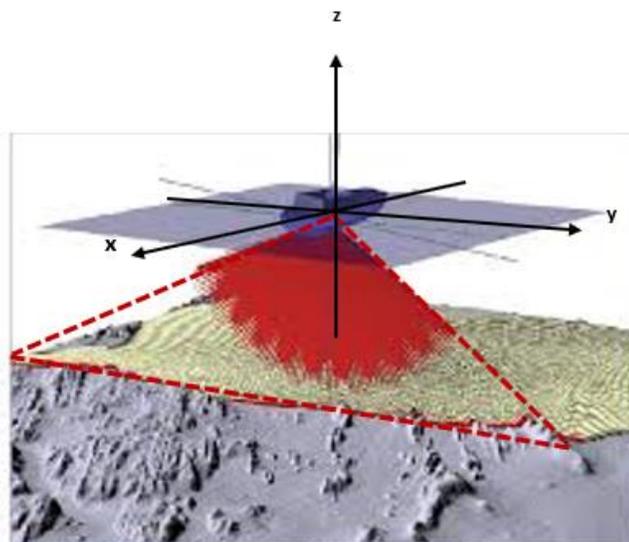


- a. Modelen la situación con un haz de rectas que pasa por un punto bajo los siguientes supuestos:

- El centro del sistema cartesiano 3D de coordenadas se encuentra en el emisor de los rayos ultrasónicos.
- El dibujo es esquemático y las dimensiones del barco no están en relación con la profundidad del mar y otras extensiones reales.
- El plano que está representado por el haz de rectas no está paralelo a plano alguno de coordenadas.
- El fondo submarino está paralelo a la superficie del mar y se conoce la profundidad del fondo del mar. (Estimar libremente).
- El borde de la fosa submarina tiene la forma de una recta y se extiende más por ambos lados del segmento que se investiga.

Conexión
interdisciplinaria:
Ciencias para la
Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio

- b. Con herramientas digitales, elaboren una ecuación del haz de rayos.



- a. Según los datos de la modelización, determinen la ecuación vectorial de la recta que representa el borde de la fosa.
- b. ¿Por qué se puede modelar las ecosondas con forma de abanico, con ecuaciones vectoriales de planos?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En primera instancia, se propone que usen GeoGebra 3D en las actividades, como una manera visual y dinámica de comprender los conceptos asociados a rectas y planos. Se sugiere discutir después algunos métodos algebraicos relacionados con sistemas de ecuaciones.
2. GeoGebra 3D entrega directamente la ecuación paramétrica de una recta en el sistema coordenado 3D, pero no lo hace directamente en el caso de los planos, pues entrega la ecuación cartesiana. Por ello, conviene que los estudiantes construyan paso a paso la ecuación paramétrica, considerando el vector posicional y los dos vectores directores.
3. Para establecer la intersección de un plano con los ejes de coordenadas, en la actividad 4, los alumnos deben verificar que las rectas que pasan por los pares de puntos S_x, S_y ; S_x, S_z y S_y, S_z , determinan las rectas de intersección.
4. Se sugiere dar más espacio para que desarrollen la intersección entre rectas y planos, considerando sus ecuaciones paramétricas. No se pone mucho énfasis en la intersección de dos planos en posición relativa general entre ellos; en cambio, se prefiere trabajar exclusivamente en la intersección de un plano cualquiera con los planos XY, XZ e YZ.
5. Las rectas del haz determinan un plano común y la recta h representa la intersección de este plano con el plano E . Para determinar la ecuación de la recta h , es suficiente establecer dos puntos de ella, que resultan de la intersección con dos rayos.

6. Para determinar la intersección del haz de rayos con el fondo marino, basta con calcular la intersección de dos rayos con el fondo marino.
7. En esta actividad, el énfasis está en la modelización y no en un resultado definido. Por esta razón, se supone un fondo marino plano y de dirección horizontal, para que los cálculos simbólicos no tengan tanta exigencia matemática.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
 - Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos XY , XZ e YZ .
 - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, mediante representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Rectas y planos

<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/simbolico/geometria/geometria.html>

- Rectas en el espacio

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/SUPERIOR/algebra-vectorial-planos-rectas/node5.html>

- Ecuación vectorial

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ematematicas.net/eirectaespacio.php?a=6>

- Recta y plano: intersecciones y ángulos

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-y-plano-intersecciones-y-angulos/>

- Proyecto de inspección con sonar de barrido lateral y levantamiento topográfico

https://www.curriculumnacional.cl/link/http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/mgd/carvaja_r_jo/capitulo6.pdf

Actividad 4: Resolver problemas que involucran mediciones en el sistema de coordenadas 3D

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes determinen distancias en el espacio, módulos y ángulos entre vectores, de manera visual y con herramientas digitales. Aunque algunas actividades pueden resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello, por lo que se sugiere que empleen apoyo tecnológico. Se pretende que resuelvan problemas en contexto, en los cuales se requiera usar puntos, vectores, rectas y planos en el sistema 3D. Para esto, tienen que trabajar colaborativamente y compartir las diferentes habilidades y experticias en conocimiento y habilidades espaciales.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE INVOLUCRAN MEDICIONES

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

Pueden emplear el software GeoGebra 3D; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo determinar módulos de vectores?

En el sistema cartesiano 3D, marquen el punto $S(4; 5; 3)$, dibujen el vector posicional \vec{s} , estimen su módulo y determinenlo mediante la función “Abs()” de GeoGebra 3D. Comparen el resultado, midiendo la longitud del vector con la herramienta “Distancia o Longitud”.

2. ¿Cómo determinar el largo de segmentos?
 - a. Ubiquen en el sistema cartesiano 3D, los puntos $A(-6; -2; 3)$ y $B(6; 1; 7)$. Dibujen sus vectores posicionales. Estimen la distancia del segmento AB y anoten esa estimación en sus cuadernos.
 - b. Comprueben su estimación con GeoGebra 3D, mediante la herramienta “Distancia o Longitud” el largo del segmento AB . Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.
 - c. Marquen los puntos $P(1; 2; 4)$, $Q(2; 4; 0)$ y $R(-4; 6; 2)$. Además, marquen el punto medio M_{QR} del lado QR y dibujen el segmento PM_{QR} . Dibujen los vectores posicionales de cada punto. ¿Cuánto mide el largo del segmento PM_{QR} ? Hagan una estimación y anótenla en sus cuadernos.
 - d. Comprueben, usando la herramienta “Distancia o Longitud” de GeoGebra.
 - e. Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.

3. ¿Cómo determinar el ángulo entre dos vectores?
 - a. Ubiquen los puntos $K(2; 4; 6)$, $L(4; 6; 0)$ y $M(0; 9; 0)$, que determinan un triángulo en el espacio. Dibujen sus vectores posicionales.
 - b. ¿Cómo se puede establecer el ángulo interior δ en el vértice K ? Hagan una estimación:

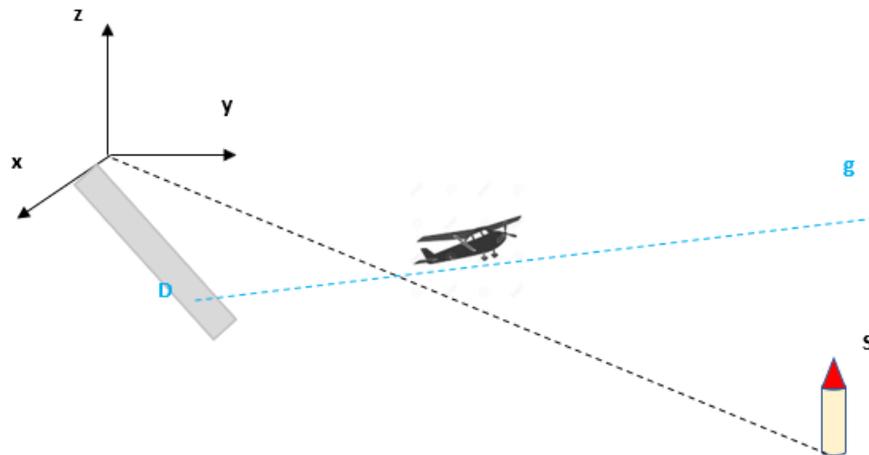
 - c. Comprueben, usando la herramienta “Ángulo” de GeoGebra.
 - d. Discutan acerca de otras posibles maneras de responder la pregunta.

4. ¿Cómo saber la distancia entre un punto y un plano?
 - a. Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
 - b. Imaginen que se tiene un punto P y un plano E dado en su forma cartesiana. Usando las herramientas de GeoGebra 3D, elaboren una estrategia para determinar la distancia entre P y E . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
 - c. Determinen la distancia entre el punto P y el plano E , con $P(2; 0; 1)$ y $E: x + 8y - 4z = 25$.

SITUACIONES AERONÁUTICAS

Se sugiere un trabajo grupal en las siguientes actividades.

1. ¿Cómo establecer la distancia entre un punto P y una recta g , en el contexto de distancias de seguridad de una avioneta en la fase del despegue?
 - a. Utilicen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra.
 - b. En el siguiente dibujo, una avioneta está despegando desde un aeródromo para ir a un pueblo. Se quiere saber la diferencia, en distancia, entre la avioneta y la punta de una torre en el momento en que la nave sobrevuela la torre.



- c. Determinen la distancia entre la avioneta y la punta S de la torre, con los siguientes datos del vuelo referidos al sistema cartesiano 3D de coordenadas. Las coordenadas de los puntos representan unidades de 100 m. La siguiente información es importante para la situación:
- El lugar del despegue está en el punto $D(2; 2; 0)$.
 - El vector director de la recta g que representa la trayectoria del vuelo, es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - El lugar de la punta de la torre es $S(1, 6, 0.5)$.
2. ¿Cómo saber la distancia de dos rectas que se cruzan en el espacio sin tener intersección? Empleen el sistema coordenado 3D, pueden apoyarse en GeoGebra 3D.
- Consideren las siguientes rectas $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$, y $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.
 - Verifiquen que las rectas se cruzan sin intersección.
 - Determinen la distancia entre las rectas. Discutan en el grupo y expliquen su procedimiento.

SUPERVISIÓN DEL ESPACIO AÉREO

¿Cómo modelar situaciones de supervisión del espacio aéreo? Supongan que hay en el espacio aviones todavía en la fase del despegue, otros en la fase del descenso y otros que están volando horizontalmente dentro de su altura, asignada por la supervisión aérea. Hay distancias de seguridad para vuelos cuyas trayectorias se cruzan en el espacio. La foto muestra un cruce de dos aviones, representados por los rayos de condensación.



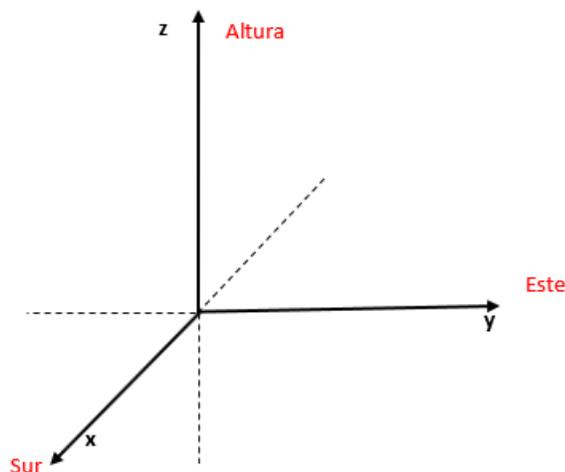
El sistema de coordenadas en tres dimensiones relaciona los tres ejes con los puntos cardinales y la altura sobre el nivel del mar. El Este y el Oeste con el eje Y, el sur y el norte con el eje X y sobre o bajo el nivel del mar con el eje Z. Hay dos aviones A_1 y A_2 en el espacio aéreo, cuyos vuelos en el mismo instante tienen los siguientes datos en kilómetros con relación al punto $(0; 0; 0)$

Conexión
interdisciplinaria:
Ciencias para la
Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio

Avión A_1 : Ubicación en el lugar $P(30; -40; 8)$, dirección del vuelo horizontal hacia el NE.

Avión A_2 : Ubicación en el lugar $Q(20; 50; 8.5)$, dirección del vuelo horizontal hacia el NO.

1. Ubica los aviones en el sistema de coordenadas 3D.



- Suponiendo que ambos aviones tengan la misma velocidad, la situación se puede modelar en forma netamente geométrica. Conjeturen acerca de una eventual colisión entre ambas naves si mantienen sus trayectorias. Discutan en el grupo y expliquen su hipótesis.
- Elaboren la ecuación vectorial que representa la trayectoria de cada vuelo.

- c. Determinen el lugar de colisión o de cruce y, en el caso de un cruce, la distancia vertical entre los aviones. Discutan y expliquen su procedimiento.
- d. Verifiquen y representen los resultados con algún programa de geometría digital.
2. En otra situación en el espacio aéreo, un avión A está en el lugar $R(3; 2; 1)$ volando en línea recta con el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que está ascendiendo. Otro avión B está en la fase del descenso y se ubica en el lugar $Q(-6; -5; 7)$, volando también en línea recta con el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- a. Determinen la distancia d entre los aviones en el momento en que se cruzan. Discutan y expliquen su procedimiento.
- a. Verifiquen y representen los resultados, usando GeoGebra 3D.
- b. ¿Es posible que establecer si puede haber o no una colisión de aviones, por medio de una fotografía en dos dimensiones? Discutan y expliquen su argumento.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere que los estudiantes utilicen la herramienta GeoGebra 3D para desarrollar y verificar sus resultados. Aunque varios de los problemas planteados podrían resolverse mediante el producto punto entre vectores, el foco no está puesto en ello; por ende, se prefiere que busquen caminos alternativos con apoyo tecnológico.
- Conviene que usen las herramientas de GeoGebra 3D para determinar distancias, módulos y ángulos entre vectores; aun así, cabe recordar cómo se aplica el teorema de Pitágoras. En las actividades, el ángulo entre vectores \vec{u} y \vec{v} se limita a vectores directores de rectas que tienen un punto común.
- Cuando necesiten saber la distancia entre un punto y un plano, se sugiere que discutan y elaboren una estrategia, a partir de las herramientas que tiene el programa de geometría dinámica.
- Hay que enfatizar en cuáles son las posibilidades de posiciones relativas entre dos rectas, en el espacio coordinado 3D: cortarse, ser paralelas o cruzarse a una cierta distancia entre ellas.
- En la actividad contextualizada, se recomienda centrar la atención en cómo la desarrollan, más que en si obtienen un resultado específico. Aquí valen las conjeturas, las propuestas y la diversidad en la búsqueda de soluciones.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - En el sistema de coordenadas 3D, representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
 - Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.
 - Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Formulario de vectores
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/vectores_escalar/teoria/form_vec.html
- Producto escalar de dos vectores
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.calculadoraconvertor.com/producto-escalar-de-dos-vectores/>

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Indicadores de evaluación

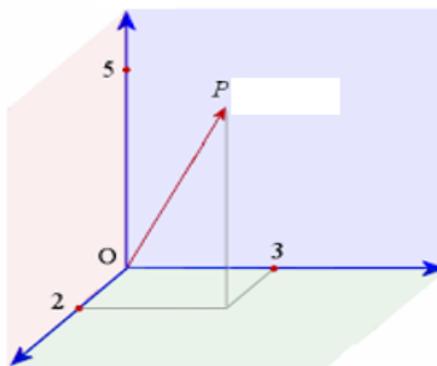
- Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.
- Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.
- Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.
- Representan gráficamente en el sistema de coordenadas 3D, ecuaciones vectoriales de rectas y planos.
- Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.
- Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y entre un plano cualquiera con los planos XY , XZ e YZ .
- Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que los alumnos trabajen colaborativamente en algunas, a fin de que discutan y propongan estrategias para llegar a la o las soluciones posibles.

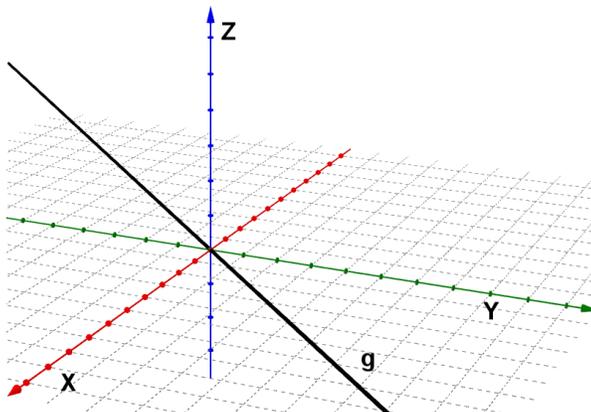
Los jóvenes tienen que ubicar ejes y coordenadas de vectores posicionales asignados a puntos, en el sistema cartesiano 3D de coordenadas.

1. Determina las coordenadas del punto P y su vector posicional.



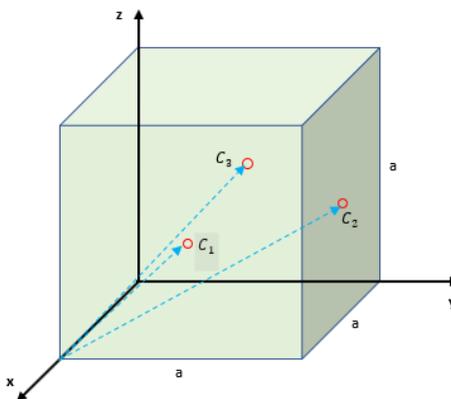
- a. Marca ahora los puntos $R(-2; 6; 8)$ y $S(5; 3; 1)$.

- b. Determina el vector \overrightarrow{RS} , que traslada el punto R al punto S, y además el vector \overrightarrow{SR} .
- c. ¿Qué tienen en común los vectores \overrightarrow{RS} y \overrightarrow{SR} y en qué difieren?
- d. ¿En qué plano se ubica el punto que tiene el vector posicional $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?
2. Posición de rectas y planos especiales.
- a. Determina un vector director de una recta f que tiene la dirección del eje X.
- b. Determina un vector director de una recta g que tiene la dirección de una bisectriz entre los ejes horizontales.



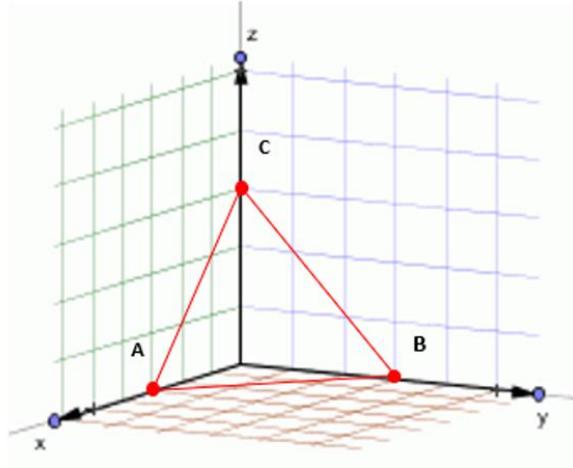
- c. Si $a, b \in \mathbb{R}$, ¿cuál sería la ubicación del plano E con el punto $P(0; 0; a)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Haz un esquema.
- d. Verifica lo anterior, determinando la ecuación del plano E con $P(0; 0; 5)$ y los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. En el sistema cartesiano 3D de coordenadas, se muestra un cubo del lado a .



- a. C_1 , C_2 y C_3 son puntos medios de la cara delantera, la cara lateral derecha y la cara trasera del cubo. Representa los vectores posicionales \vec{c}_1 , \vec{c}_2 y \vec{c}_3 de los puntos C_1 , C_2 y C_3 .
- b. Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{C_2C_3}$.

- c. Estima el ángulo entre los vectores \vec{c}_2 y \vec{c}_3 . Verifica el resultado con alguna herramienta digital o de forma manual.
4. Considerando $a \in \mathbb{R}$, se marcó los puntos $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ y $C(0; 0; a)$ en un sistema cartesiano 3D de coordenadas, como muestra la figura.

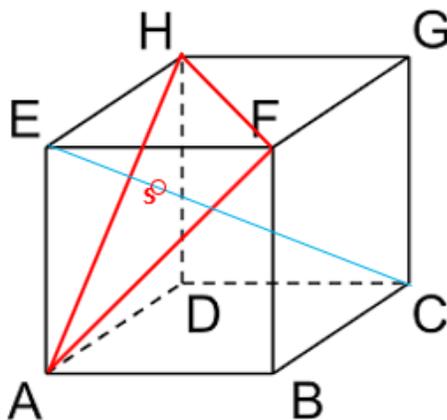


- a. Determina la ecuación vectorial de la recta g que pasa por el origen O del sistema cartesiano 3D y el centro Z del triángulo ABC .
- b. Los puntos $A_k(ka; 0; 0)$, $B_k(0; ka; 0)$ y $C_k(0; 0; ka)$, con $k \in \mathbb{R}$, representan el triángulo $A_k B_k C_k$. Argumenta y comunica si la recta de la actividad anterior pasa o no por el centro Z_k del triángulo $A_k B_k C_k$.
5. Reflexión de un punto del espacio en un plano (simetría especular).
- a. Refleja el punto $P(5; 2; 3)$ en el plano xy . Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- b. Refleja el punto $R(2; 6; 4)$ en el plano xz . Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- c. Refleja el punto $R(2; 6; 4)$ en un plano paralelo al plano xz que contiene el punto $S(0; 1; 0)$. Verifica el resultado con GeoGebra 3D.
- d. Refleja el punto $Q(3; 3; 0)$ en el plano E con la ecuación cartesiana de $E: 3x + 2y + z = 8$.

Se recomienda el trabajo grupal en los próximos ejercicios.

1. Determinen tres planos diferentes que contengan una recta g_0 en común y los puntos $P_0(2, 3, 4)$ y $Q_0(-2, 1, 4)$. Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
2. En un sistema cartesiano 3D de coordenadas, un cubo tiene los vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(-a, a, 0)$ y $E(0, 0, a)$. Los puntos A , F y H determinan un plano M y los puntos E y C determinan una recta g .
- a. Determinen una ecuación vectorial del plano M y de la recta g .

- b. La recta g intersecta el plano M en el punto S . Determinen las coordenadas del punto S .
- c. Verifiquen el resultado de S mediante herramientas digitales como GeoGebra para $a = 8$.



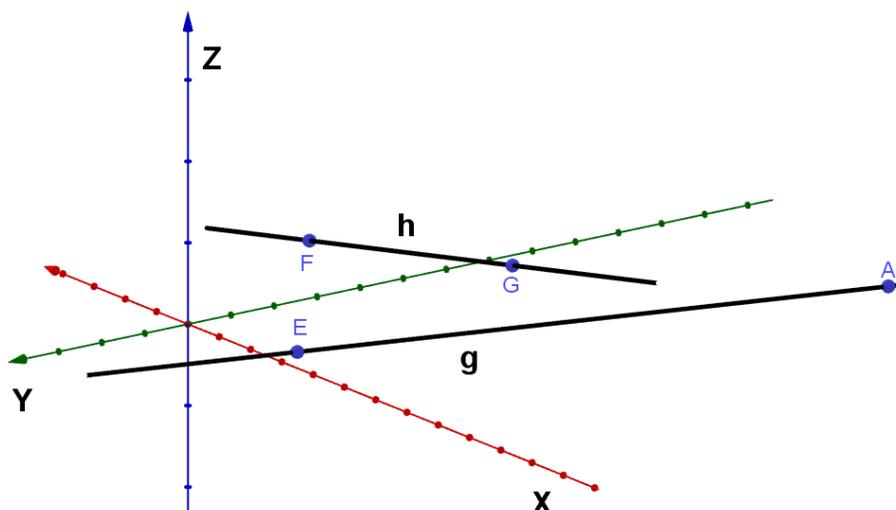
3. Intersección de rectas con planos.

- a. Determinen la intersección entre la recta g y el plano E que tienen las siguientes ecuaciones vectoriales: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$, y $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$.
Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.
- b. Encuentren la intersección del plano $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $k, l \in \mathbb{R}$, con los tres ejes de coordenadas. Denominen los puntos con S_x, S_y y S_z . Discutan en el grupo y comuniquen su estrategia.

4. Distancia entre rectas en el sistema coordenado 3D.

- a. Consideren las rectas de ecuaciones $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, y $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$. Dichas rectas no se intersectan, pero sí se cruzan en el sistema coordenado 3D.

- b. Grafica cada una en GeoGebra 3D.



- c. Propongan una estrategia para establecer a qué distancia vertical están separadas.

5. Distancia d entre un punto Q , perteneciente a una recta g , y un plano H .

- a. Expliquen los pasos para determinar la distancia d .

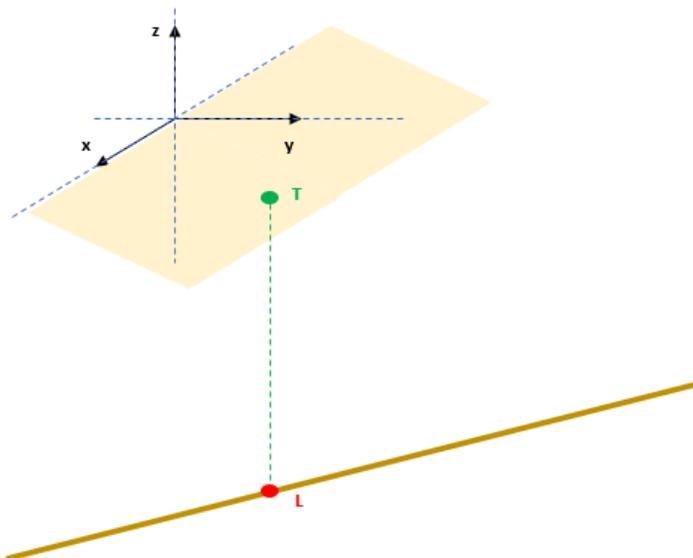
- b. Verifiquen que el punto $Q(3, 1, 1)$ pertenece a la recta $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

- c. Determinen la distancia entre el punto Q y el plano $E: 2x + 10y + 11z = 252$.

EL RESCATE DE LOS 33

En situaciones de rescate en minería, como ocurrió en Chile en el año 2010 con los “33”, se necesita maquinaria de perforación del suelo de alta precisión. El sistema “Rotary Vertical Drilling System” (RVDS), que significa “sistema de taladro vertical”, cumple con esta exigencia. En esta actividad, se modela con geometría 3D una situación similar al rescate de “los 33”, con los siguientes supuestos de simplificación y unos pasos propuestos del procedimiento.





- En referencia al sistema cartesiano 3D, el lugar L está a 700 m de profundidad. La posición horizontal está a 200 m al oeste y a 300 m al sur. La dirección geográfica de norte a sur está representada por el eje y . La perforación del pozo de rescate se debe realizar exactamente en dirección vertical.
 - Determinen las coordenadas de la torre del taladro en el punto T .
 - Determinen la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos T y L .
- Se supone una tolerancia de 0,5% de la exactitud en la desviación del taladro de la dirección vertical.
 - Determinen el vector director \vec{v} de la recta (y del taladro) que pasa por el punto T , suponiendo una desviación en dirección del eje x .
 - Determinen el lugar L' en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
- El sistema "RVDS" utilizado en el rescate de "los 33" tiene más exactitud, con una tolerancia de 0,05% de desviación.
 - Determinen el vector director \vec{u} de la recta (y del taladro) que pasa por el punto T , suponiendo una desviación en dirección del eje y .
 - Determinen el lugar L'' en el cual el taladro llega a la profundidad de 700 m.
- Suponiendo una desviación de 0,05% en cualquier dirección horizontal, ¿cuál podría ser el lugar físico de los posibles puntos en los cuales el taladro perfora el plano en 700 m de profundidad?
 - Argumenten y comuniquen las respuestas.
 - Determinen cuatro puntos que pertenecen a este lugar.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.			
Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.			
Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.			
Representan gráficamente ecuaciones vectoriales de rectas y planos en el sistema de coordenadas 3D.			
Resuelven problemas que involucran la ecuación vectorial de rectas y planos en el espacio.			
Resuelven problemas sobre intersecciones entre una recta y un plano cualquiera, y de un plano cualquiera con los planos XY , XZ e YZ .			
Justifican las estrategias y soluciones de problemas, utilizando las representaciones pictóricas o simbólicas de rectas y planos en el espacio.			