Unidad 1: Representación vectorial de situaciones y fenómenos

Propósito de la unidad

Los estudiantes utilizan la representación vectorial para describir situaciones y fenómenos de la vida diaria, y comunican sus resultados de manera gráfica y también algebraica. Asimismo, comprenden y utilizan las propiedades de las operaciones con vectores, y aplican este conocimiento en la representación de isometrías y homotecias. También interpretan situaciones mediante ecuaciones vectoriales y profundizan en el uso de los vectores. Algunas preguntas que pueden orientar esta unidad son: ¿Cómo se puede calcular y representar la dirección del movimiento? ¿Qué implicancias tienen las operaciones y propiedades de los vectores al describir un fenómeno?

Objetivos de Aprendizaje

OA 1.

Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actividad 1: Representar situaciones con vectores

PROPÓSITO

Se espera que los jóvenes recuerden lo que han estudiado hasta ahora de vectores y que profundicen en algunas de sus características esenciales. Trabajarán el concepto de vector, efectuarán operaciones con vectores y escalares, y harán la representación gráfica, usando el plano cartesiano en 2D. Pueden utilizar herramientas manuales y digitales para responder y representar la situación cotidiana sobre caminos. Estas actividades buscan ser un punto de partida para vincular el uso habitual de los vectores –que se presenta de forma sistemática en la vida escolar– con un estudio más profundo del álgebra en la educación superior.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

DESCRIBIR TRAYECTOS DE MANERA PRECISA

Para las siguientes actividades, los alumnos pueden utilizar el software GeoGebra. Para ello, crean una cuenta en www.geogebra.org y generan una carpeta o “Portafolio Digital” para guardar y compartir todos los trabajos o proyectos que hagan con este programa.

Entre los muchos atractivos turísticos de la ciudad de Valdivia, se puede cruzar caminando el puente Pedro de Valdivia que conecta con la Isla Teja. Asimismo, hay varias rutas para recorrer caminando, y el trayecto seguido dependerá de las condiciones geográficas. También se puede navegar por el río Calle Calle en veleros, catamaranes, barcazas, entre otras embarcaciones. Cuando se navega, hay que considerar que la velocidad del viento y la velocidad con que fluye el río afectan a la embarcación. A partir de esa información, en los siguientes ejercicios se describirá rutas en las que pueden influir o no distintas fuerzas a la vez, usando vectores.

Fig. 1: Ciudad de Valdivia, puente Pedro de Valdivia. (Fuente: Google Maps).

1. Una persona está ubicada en un extremo del puente Pedro de Valdivia y desea cruzar hacia la isla Teja, ¿cómo describirías el trayecto que debe seguir?
   a. ¿Hacia dónde debe moverse? ¿Cuál es el sentido de su movimiento?
   b. ¿En qué dirección se debe mover? Haz la diferencia con la pregunta anterior.
   c. ¿Cuánto se debe mover? ¿Cuál es la distancia que debe recorrer? Si usas la opción de medir distancia en la aplicación de Google Maps, puedes obtener la longitud aproximada del puente.
   d. Si solo hubieses usado un número para describir el trayecto de la persona, ¿habrías logrado ser tan preciso? ¿Cómo lo habrías hecho?

Conexión interdisciplinaria: Educación Ciudadana, OA a, 3° y 4° medio

2. Observa el desplazamiento de una persona desde el punto A hasta el punto B. Construye un vector usando GeoGebra, como se muestra en la siguiente figura.

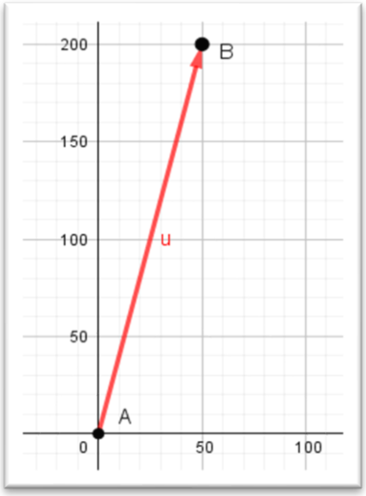


Fig. 2: Vector en el plano cartesiano

a. Indica las coordenadas del punto de origen y del punto extremo.

Tabla 1: Notaciones de un punto en el plano cartesiano

Notación	Punto de origen o punto inicial	Punto extremo o punto terminal
$P(a;b)$		
$P\binom{a}{b}$		

b. Indica cuál es el vector de desplazamiento.

Tabla 2: Notaciones de un vector en el plano cartesiano

Notación	Vector de desplazamiento
$\vec{u} = (u_1;\ u_2)$	
$\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$	

c. ¿Cuál es la diferencia entre los puntos y el vector? ¿Cuál es la diferencia geométrica y en el contexto, entre un punto y un vector?

3. Indica cómo se pueden obtener las coordenadas del vector de desplazamiento, usando las coordenadas del punto origen y del extremo.
   a. Prueba con otros casos puntuales para corroborar tu conjetura.
   b. Copia el vector en otro lugar del plano cartesiano, respetando la dirección, el sentido y el módulo.
   c. Vuelve a determinar, como hiciste antes, las coordenadas del nuevo vector, usando el punto de partida y de llegada, ¿qué obtuviste?
   d. ¿Cómo se interpreta que dos vectores, cuyas coordenadas son iguales, puedan estar ubicados en distintos lugares en el plano cartesiano? Explica también usando el contexto dado al inicio.
   e. ¿Se puede afirmar que los vectores anteriores son iguales?

4. Supón que una persona, además de cruzar a la Isla Teja por el puente Pedro de Valdivia, decide continuar caminando por la orilla del río Calle Calle. Su trayectoria podría describirse mediante la figura:

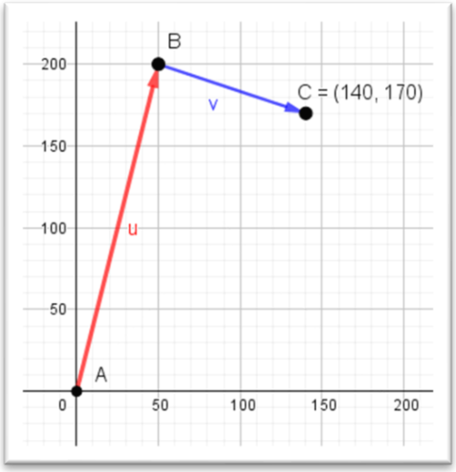


Fig. 2: Desplazamientos consecutivos en el plano cartesiano

a. Indica las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b. Si pudieras ir de A hasta C en línea recta, ¿qué camino seguirías? Márcalo en el gráfico anterior.
c. ¿Qué vector describe el trayecto que seguirías? Llama al nuevo vector $\vec{w}$.

5. Observa la figura y úsala como referente para explicar: ¿cómo podrías obtener las coordenadas del vector $\vec{w}$ a partir de las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

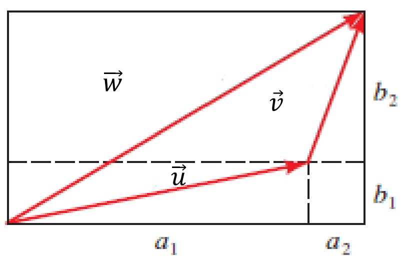


Fig. 3: Suma de vectores

a. ¿Cómo se resta dos vectores?
b. ¿Cuáles serían las coordenadas del vector resultante?
c. ¿Cómo se interpreta la resta de dos vectores en este contexto?

6. Si una persona, luego de cruzar el puente, decide caminar la misma distancia que ya había recorrido en el mismo sentido y dirección:
a. ¿A qué punto llegaría? Márcalo en el plano cartesiano anterior.
b. ¿Qué vector podría describir el desplazamiento total del punto A al punto D?
c. Usando la figura como referente, determina las coordenadas del vector $\vec{t}$ a partir de las coordenadas del vector $\vec{u}$.
d. Prueba multiplicando por otros escalares al vector $\vec{u}$. No todos enteros positivos.

e. En GeoGebra, dibuja un vector cualquiera y, usando un deslizador, multiplica dicho vector por un escalar cualquiera o usa el applet “Escalar por vector”.
f. Generaliza: ¿qué se obtiene al multiplicar un vector por un escalar?

REPRESENTAR DESPLAZAMIENTOS MEDIANTE VECTORES

1. Una persona desea cruzar un río en un bote con motor y llegar justo al frente de donde se encuentra. Como se muestra en la figura, el bote debe ir del punto A al punto B.

Fig. 4: Puntos de partida y llegada al cruzar un río

2. Si en el momento de cruzar, la corriente superficial del río en ese lugar es de $2\frac{m}{s}$ en la dirección suroeste, ¿qué vector describe la velocidad del río? Márcalo en la figura 4.

3. Considera que la rapidez del bote es de $7\frac{m}{s}$.
   a. Aproximadamente, ¿hacia dónde debería apuntar la proa del bote para que pueda llegar de A hasta B, considerando la corriente del río?
   b. ¿Cuál es el vector de la velocidad del bote? Marca un vector aproximado en la figura 4.

4. ¿Cuál es el vector que muestra el curso real que seguiría el bote, dadas la corriente y la dirección de la proa del bote? Bosqueja el vector en la figura 4.

5. Ubicando de forma conveniente el plano cartesiano, la situación puede describirse como se muestra en la figura 5.
   a. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u}$? Completa:

$$\vec{u} = \left(\quad \right)$$

   b. ¿Qué representa θ en el contexto estudiado?

c. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{v}$ en términos de θ? Completa:

$$\vec{v} = \left(\quad \right)$$

d. ¿Qué relación geométrica se da entre los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

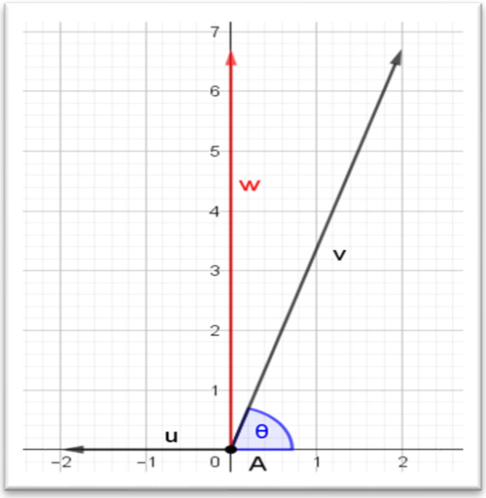


Fig. 5: Vectores en el plano cartesiano

6. Plantea las ecuaciones para obtener de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7sen(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\cos(\theta) \\ 7sen(\theta) \end{pmatrix}$$

a. Resuelve y determina el valor de θ.

b. Responde nuevamente: ¿hacia dónde debería apuntar la proa del bote para que pueda llegar desde A hasta B, considerando la corriente del río?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que, para tratar el módulo de un vector, se mida directamente la longitud del vector o se use el teorema de Pitágoras.

2. Cabe notar que tiene sentido hablar sobre velocidad en este contexto. Se sugiere especificar a los alumnos las diferencias técnicas entre las palabras rapidez (relación entre distancia y tiempo) y velocidad (relación entre distancia y tiempo que tiene una dirección). Destaque que habitualmente no se hace esta diferencia en lenguaje común, pero hay que hacerla en términos matemáticos y físicos.

3. Se recomienda evidenciar que uno de los aspectos esenciales del trabajo con vectores es la diferencia entre un punto y un vector, lo cual generalmente confunde a los estudiantes debido a las similitudes en la notación algebraica. Para ello, se introduce la notación vertical de un vector. Por

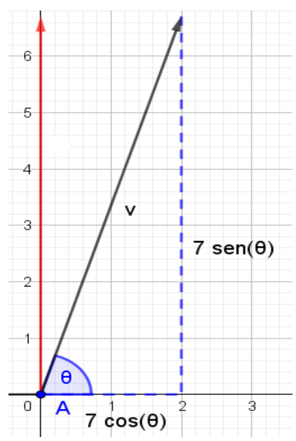
ejemplo, $\vec{u} = \binom{5}{-1}$ que debe distinguirse del punto $A = (5; -1)$. Del mismo modo, se debe aclarar el significado y las notaciones para un vector, un rayo o un segmento.

4. Luego analizan un vector que puede tener origen en el centro del plano cartesiano o fuera de él, y concluyen que un vector se define según su punto de origen y su punto extremo, y no solo por el primero de ellos. Conviene que reflexionen sobre las diferencias entre un vector, un rayo y un segmento.

5. En cuanto a la suma de vectores, se recomienda plantearla primero de forma gráfica para concluir desde aquí hacia la forma algebraica, y hacer lo mismo para el caso del producto entre un vector y un escalar.

6. También se sugiere que sepan diferenciar cuándo un vector ya no se usa para representar desplazamientos, sino velocidades. Conviene ubicar el plano cartesiano a conveniencia, de modo que no coincida con los puntos cardinales. En este caso, la idea es que dos de los tres vectores involucrados coincidan con los ejes del plano; así, toda la atención se centra en un solo vector y en la necesidad de determinar sus componentes.

7. Cabe recordar cómo se vinculan las razones trigonométricas con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Además, es importante considerar que la medida de la hipotenusa en el triángulo rectángulo corresponde al módulo del vector $\vec{v}$ o la velocidad del bote, como se muestra en la siguiente figura:



8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

   - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
   - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es

- Razones trigonométricas para usar en las componentes vertical y horizontal de un vector
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://jorgefernandezherce.es/proyectos/angulo/temas/teman/index.html

- Google Maps
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.google.cl/maps/preview

Actividad 2: Aplicar homotecias en obras de arte

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen en el estudio de la homotecia vectorial, iniciada en 1° Medio. En esta oportunidad, se buscará generalizar la homotecia para un valor cualquiera de factor de homotecia, relacionando y, a la vez, diferenciando entre producto de vector por escalar y la homotecia aplicada a un punto o una figura. Para esto, trabajan colaborativamente en la resolución de problemas y usan la homotecia vectorial para comprender cómo la emplearon los pintores renacentistas para mejorar su trabajo, a partir de la masificación de la cámara oscura.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

APLICAR HOMOTECIAS Y ANALIZAR LOS RESULTADOS

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en grupos. Podrán utilizar el software GeoGebra. Tienen que crear una cuenta en www.geogebra.org y generar una carpeta o “Portafolio Digital” para guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados con este programa.

1. Dibujen tres puntos cualesquiera en el plano cartesiano. Identifiquen sus coordenadas y luego únanlos, formando un polígono:

2. Ahora dibujen un vector cualquiera en el plano cartesiano. Nombren $\vec{u}$ al vector.
   a. ¿Cuál es el origen y el extremo del vector? Discutan en el grupo y respondan.
   b. Completen con las coordenadas del vector:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

3. Apliquen el vector $\vec{u}$ al punto A. Es decir, copien $\vec{u}$ desde A.
   a. ¿Qué tipo de movimiento en el plano han realizado sobre A? Discutan y respondan.
   b. Apliquen también el vector $\vec{u}$ sobre los demás vértices y luego unan las imágenes de los vértices A, B y C, formando un polígono.
   c. ¿Cómo es la nueva figura obtenida con las imágenes del triángulo? Discutan y respondan.
   d. ¿Qué tipo de movimiento se aplicó a la figura inicial? Discutan y respondan.

4. Dibujen un punto en el plano cartesiano O, que se usará como centro de la homotecia.
   a. Dibujen el vector $\vec{v}$ que va desde O hasta A.
   b. Desde O, pasando por A, dibujen el vector $2\vec{v}$. Se dirá que el factor de homotecia es $k = 2$.
   c. Indiquen las coordenadas de A' luego de aplicar la homotecia de centro O y factor de homotecia 2.

5. Repitan todos los pasos anteriores con los demás vértices del triángulo.
   a. Unan los puntos imágenes, ¿cómo es la figura que se ha obtenido? Discutan y respondan.
   b. Comparen este movimiento en el plano con la traslación aplicada anteriormente. Señalen las semejanzas y diferencias.

6. Completen la tabla para determinar cómo podrían obtenerse las coordenadas de los puntos imágenes, sin necesidad de contar con la representación en el plano cartesiano.

Tabla 1: Puntos imágenes a partir de aplicar la homotecia

Origen vector Punto O	Punto extremo vector	Coordenadas vector	Vector ponderado por la razón de homotecia	Vértice figura	Vértice imagen
$O(\ ;\ )$	$A(\ ;\ )$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$k\vec{v} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$A(\ ;\ )$	$A'(\ ;\ )$
$O(\ ;\ )$	$B(\ ;\ )$	$\vec{w} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$k\vec{w} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$B(\ ;\ )$	$B'(\ ;\ )$
$O(\ ;\ )$	$C(\ ;\ )$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$k\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$C(\ ;\ )$	$C'(\ ;\ )$

7. Busquen una forma de obtener los vértices imagen a partir de la primera y la cuarta columnas de la tabla anterior. Analicen y comenten su procedimiento.

8. Ahora construyan un applet usando alguna herramienta digital para trabajar la homotecia. Creen un deslizador que permita hacer variar el parámetro *k* (factor de homotecia). El rango para el factor de homotecia puede definirse entre – 10 y 10 con un incremento decimal de 0,1.

a. Analicen el caso $k > 1$:
- ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$ y $\overrightarrow{w'}$? Expliquen.
- ¿Cuál es la dirección y el sentido de estos vectores? Compárenlas con la dirección y el sentido de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, respectivamente.
- ¿Cuál es el módulo de los vectores $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$ y $\overrightarrow{w'}$? Compárenlas con los módulos de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ mediante un cociente, respectivamente.
- Describan en términos generales la figura imagen respecto de la figura inicial.

b. Para los siguientes casos, analicen y respondan las mismas preguntas que en a. Utilicen el applet construido.
- Caso $k = 1$
- Caso $0 < k < 1$
- Caso $k < -1$
- Caso $k = -1$
- Caso $-1 < k < 0$
- Caso $k = 0$

EL CONCEPTO DE HOMOTECIA EN EL ARTE

Se sugiere que trabajen las siguientes actividades en grupos.

Conexión interdisciplinaria: Artes OA 6, 3° y 4° medio

1. ¿Cómo creen que algunos artistas del Renacimiento lograban conseguir tal perfección en sus obras de arte? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar la pregunta.

Fig. 1: "La lechera". Obra de Johannes Vermeer, 1660.

a. Si aún no existía la fotografía, ¿cómo pudo Johannes Vermeer retratar con tanta exactitud esta escena llamada "La lechera"? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar la pregunta.
b. ¿Tendrían ciertos artistas del Renacimiento alguna técnica para retratar el momento y luego pintarlo, sin hacer que los retratados tuvieran que pasar horas estáticos? ¿Qué creen que hacían? Investiguen en la web y discutan en el grupo, según las fuentes a las que accedieron.

2. Simplificando un poco la realidad para poder estudiarla más fácilmente, supongamos que un artista desea pintar algo muy simple, solo en dos dimensiones, como un palito de fósforo.
   a. Se puede ilustrar una simplificación de la cámara oscura mediante un dispositivo como el de la figura 2.

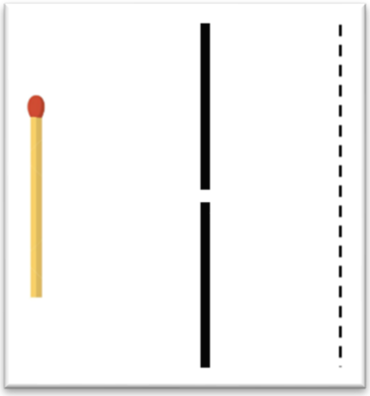


Fig. 2: Simplificación de cámara oscura. Fósforo, diafragma y pantalla de proyección.

   b. Rehagan la imagen anterior, usando vectores en el plano cartesiano. Analicen cuidadosamente los pasos a seguir y lleguen a un consenso.
   - Ubiquen el origen del plano cartesiano en el orificio del diafragma.
   - Usen un vector $\vec{f}$ para representar la posición del fósforo, considerando la cabeza del fósforo como el sentido del vector. Indiquen el módulo del vector $\vec{f}$.
   - Usen vectores para representar cómo se puede ver el fósforo desde el orificio del diafragma (se considera que el fósforo emite su propia luz). Señalen claramente el sentido de los vectores.
   - Remarquen los dos vectores del diafragma a los extremos del fósforo ($\vec{u}$ y $\vec{v}$). Indiquen sus coordenadas. ¿Cómo ha resultado la tarea hasta aquí?
   - Revisen los pasos que dieron, expliquen el proceso dentro del grupo y evalúen la pertinencia de cada paso; mejoren la estrategia cuando sea posible.
   c. ¿Cómo será la imagen del fósforo proyectada en la pantalla? Compárenla con la imagen real del fósforo.
   - Usen dos vectores, $\overrightarrow{u'}$ y $\overrightarrow{v'}$, para representar cómo atraviesa la luz por el orificio del diafragma hasta la pantalla de proyección. Indiquen sus coordenadas.

3. Discutan en el grupo y argumenten por qué esta situación corresponde a una homotecia vectorial.
   a. Señalen dónde se ubica, idealmente, el centro de homotecia y cuáles son sus coordenadas.
   b. ¿Cuál es el valor del factor de homotecia? Expliquen cómo determinaron este valor.
   c. El signo del factor de homotecia, ¿coincide con la posición de la imagen proyectada del fósforo?
   d. Dibujen un vector $\vec{p}$ para representar la imagen del fósforo, e indiquen módulo, dirección, sentido y sus coordenadas.
   e. Determinen las coordenadas de $\vec{p}$, usando una estrategia algebraica que involucre el factor de la homotecia y otros vectores conocidos en el problema.

4. ¿Existe alguna distancia al diafragma en la que se podría ubicar el fósforo para obtener una imagen que sea la cuarta parte su longitud (original)? Analicen y determinen las coordenadas de $\vec{f}$ y de $\vec{p}$, de ser posible.
    a. ¿Se podría cumplir que $\vec{f} = \vec{p}$? ¿Cómo explicarían esto al grupo?
    b. ¿Se podría cumplir que $\vec{f} = -1\vec{p}$? ¿Cómo explicarían esto al grupo?

5. Volviendo a los pintores del Renacimiento que usaron esta técnica:
    a. ¿Cómo eran las imágenes que debían pintar en relación con las imágenes reales? Expliquen.
    b. ¿Qué debían hacer con el cuadro (en relación con la posición de las imágenes contenidas en el retrato) para poder exhibirlo? Expliquen.
    c. ¿Qué creen que pasaría con la imagen proyectada si el orificio del diafragma fuera muy grande?
    d. ¿En qué condiciones podrían haber obtenido un retrato a tamaño real? Analicen y expliquen.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere recordar que ya vieron la homotecia en 1° Medio. Ahora se incorpora el plano cartesiano como medio para conocer el sentido, la dirección y la magnitud de vectores que representan situaciones reales.

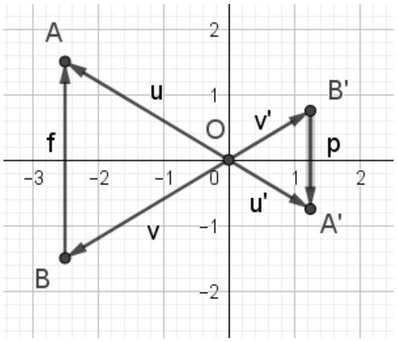
2. Se recomienda comenzar usando los vectores para trasladar un punto ubicado en el plano cartesiano, y seguir luego con la traslación de un polígono. Esto será el punto de partida para llegar a la homotecia con vectores, que tiene otras particularidades.

3. En cuanto a la homotecia, se sugiere relacionar adecuadamente conceptos como el factor de homotecia y de centro de homotecia, en el contexto de las coordenadas del plano cartesiano y el uso de vectores. Hay que destacar la diferencia entre el producto de un escalar por un vector y la homotecia, dado que el primero es un paso para obtener la homotecia y no la homotecia en sí misma.

4. Se busca generalizar para distintos valores de la razón de homotecia, determinando qué ocurre con la figura homotética en relación con la figura original. Los alumnos se apoyan en la construcción de un applet GeoGebra para probar con varios casos.

5. Respecto de la homotecia en el contexto del arte, se sugiere simplificar la situación a un caso abordable en 2D. Consiste en emplear una cámara oscura de la época del Renacimiento, con la que algunos artistas podían retratar una escena real de forma más exacta al “tomar una fotografía”. Sin embargo, la fotografía aparecía invertida y esto implicaba cambiar la imagen presentada como pintura.

6. Para el buen desarrollo de la actividad, tienen que acordar cómo se representará la situación simplificada en el plano y qué vectores se empleará, como se muestra en la siguiente imagen:



7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

- Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
- Relacionan isometrías y homotecias con vectores para describir y dar soluciones a una situación en forma simplificada.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es

- Pasos para construir una cámara oscura
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=2_zz0xJW-L0
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://experimentodefisica-valentina.blogspot.com/

Actividad 3: Transitar de 2D a 3D por medio de ecuaciones y vectores

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes vinculen el estudio de los vectores con las ecuaciones de rectas, que ya trabajaron en cursos anteriores. Ahora se presentará los vectores como una herramienta muy útil para determinar la ecuación de una recta, usando un punto y un vector, y diferenciando respecto de cómo lo hacían antes: con dos puntos de la recta o punto y pendiente. Al determinar la ecuación de una recta de este modo, se introduce el concepto de ecuaciones vectoriales, que se usan en variados contextos. Es la oportunidad de permitir que los alumnos se enfrenten libremente a la forma de representar y resolver el problema, utilizando las herramientas matemáticas que consideren necesarias.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

RECTAS POR MEDIO DE UN VECTOR

Pueden usar utilizar el software GeoGebra para las siguientes actividades; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Dibuja un vector $\vec{a}$ que parta desde el origen del plano cartesiano y cuyo punto terminal sea el punto A.
   a. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{a}$?
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$
   b. Compara las componentes de $\vec{a}$ con las coordenadas de A.
   c. El vector $\vec{a}$ se llama vector posición de A; ¿por qué crees que recibe este nombre?
   d. ¿Existe otro vector posición de A distinto al vector $\vec{a}$? ¿Cuál? ¿Cómo lo encontraste?

2. Dibuja un vector $\vec{b}$ cualquiera en el plano cartesiano anterior, que sea distinto al vector $\vec{a}$.
   a. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{b}$?
   $$\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$
   b. ¿Puedes trazar alguna recta que pase por el punto A y que contenga al vector $\vec{b}$? ¿Existe dicha recta?
   c. Traza una recta L que pase por el punto A y que tenga la misma dirección que el vector $\vec{b}$.
   d. ¿Se puede afirmar que la recta L y el vector $\vec{b}$ tienen el mismo sentido? Explica a tu compañero cómo argumentas tu respuesta.

3. Considera solo la gráfica para responder:
   a. ¿Se puede determinar siempre una recta, conocido un punto de ella y que tenga la misma dirección que un vector dado?
   b. ¿Cómo se podría obtener la ecuación de dicha recta con la misma información? Conjetura.

LA ECUACIÓN VECTORIAL

1. En GeoGebra, dibuja el punto A, el vector de posición $\vec{a}$, el vector $\vec{b}$ y la recta L.

2. Desde A copia el vector $\vec{b}$. En GeoGebra lo puedes arrastrar fácilmente.

a. ¿Cuáles son ahora las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de $\vec{b}$?

Tabla 1: Componentes y coordenadas del vector $\vec{b}$

Componentes de $\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $\vec{b}$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$A(\quad ; \quad)$	$C_1(\quad ; \quad)$

b. Dibuja el vector posición $\vec{c_1}$ del punto C_1.

c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c_1}$? ¿Cómo se puede obtener el vector $\vec{c_1}$ a partir de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

3. Desde A copia el vector $2\vec{b}$.
    a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de $2\vec{b}$?

Tabla 2: Componentes y coordenadas del vector $2\vec{b}$

Componentes de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $2\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $2\vec{b}$
$2\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$A(\quad ; \quad)$	$C_2(\quad ; \quad)$

b. Dibuja el vector posición $\vec{c_2}$ del punto C_2.
c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores $\vec{a}$, $2\vec{b}$ y $\vec{c_2}$? ¿Cómo se puede obtener el vector $\vec{c_2}$ a partir de los vectores $\vec{a}$ y $2\vec{b}$?

4. Desde A copia el vector $-\vec{b}$.
a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto terminal de $-\vec{b}$?

Tabla 3: Componentes y coordenadas del vector $-\vec{b}$

Componentes de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto inicial de $-\vec{b}$	Coordenadas Punto terminal de $-\vec{b}$
$-\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$A(\quad ; \quad)$	$C_3(\quad ; \quad)$

b. Dibuja el vector posición $\vec{c_3}$ del punto C_3.
c. ¿Cuál es la relación matemática que existe entre los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c_3}$? ¿Cómo se puede obtener el vector $\vec{c_3}$ a partir de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$? Explica tu procedimiento a tu compañero, destacando los pasos que te parecen más importantes o que se puede volver a usar en otros casos.

5. Generaliza: ¿cómo se obtiene el vector de posición de un punto cualquiera sobre la recta, a partir de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

    a. Completa:

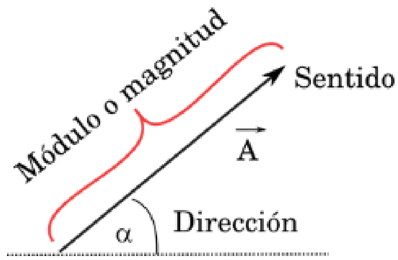
$$\vec{c} = \_\_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_$$

    b. ¿Qué diferencia hay entre un punto de esta recta y la posición vectorial de dicho punto en la recta? Explica.

6. Usando la ecuación anterior (llamada ecuación vectorial), ¿cómo puedes obtener las coordenadas de un punto cualquiera sobre la recta? Justifica.

7. Prueba dando valores específicos a k.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Note que aquí el estudiante caracterizará una recta en el plano cartesiano, a partir de un punto de la recta y un vector con la misma dirección. Dado que la ecuación de la recta está dada en términos de vectores y no de puntos en el plano, surge el concepto de ecuación vectorial de una recta.
2. Se sugiere apoyarlos para que diferencien el vector posición con el punto terminal, dado que hay coincidencia en términos numéricos. Son objetos geométricos diferentes y la notación puede ayudar a la comprensión: en el caso del punto las coordenadas, se escriben como $A(x; y)$ y en el caso del vector, las componentes se escriben como $\vec{a} = \binom{x}{y}$.
3. Para establecer la diferencia entre dirección y sentido, se sugiere repasar la definición de vector. Un esquema que puede ayudar es:
4. 

5. También se requiere comprender que una recta no tiene sentido, por lo que se puede comparar con un vector solo considerando la dirección.
6. En la segunda parte, se sugiere usar GeoGebra para visualizar de forma rápida muchos casos de "$k\vec{b}$"; incluso se puede construir un applet en GeoGebra, implementando un deslizador para k. Si no se cuenta con el software, la actividad se puede hacer perfectamente, solo que la cantidad de casos (valores distintos de k) que pruebe cada alumno será mucho más limitada.
7. En el punto (5), se espera que completen con la expresión $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$, donde $k \in \mathbb{R}$.
8. Se sugiere enfatizar que la ecuación vectorial corresponde a $\binom{x}{y} = \binom{a_1}{b_1} + k\binom{a_2}{b_2}$. Después de determinar la ecuación vectorial, se puede usar para establecer un punto específico perteneciente a la recta.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
   - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es

- Tutorial y explicación de cómo obtener una ecuación vectorial, dado un punto y un vector
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=RV3TFyVrYBs

Actividad 4: Las ecuaciones vectoriales y los fenómenos de la naturaleza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes apliquen los vectores en un contexto simplificado y, específicamente, las ecuaciones vectoriales. Principalmente, se busca que valoren la ecuación vectorial por su aporte para entender fenómenos de la naturaleza que pudieron haber estudiado en otras asignaturas, pero que, en este caso, se generalizan matemáticamente. Para esto, hay que fomentar un trabajo colaborativo, considerando las habilidades y experticia de cada integrante del grupo. Además, se pretende que experimenten cómo, a medida que se modifica, agrega o quita variables de la realidad, se puede simplificar el modelo matemático obtenido o aumentar su complejidad.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

DETERMINANDO UNA ECUACIÓN VECTORIAL SEGÚN UN PRIMER MODELO

Trabajan en grupos con un computador, usando Geogebra; recuerden guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. Comparte con tus compañeros de grupo las respuestas a las siguientes preguntas:
   a. ¿Sabías que algunas estrellas que puedes ver en una noche podrían haberse extinguido?
   b. ¿Sabías que la posición en la que tú ves una estrella no es exactamente la posición en la que se encuentra?
   c. ¿Y que esta variación depende de las capas de la atmósfera y, principalmente, de un fenómeno llamado refracción?
2. Lee a tus compañeros de grupo la siguiente información: “El cambio de dirección y velocidad que experimenta una onda al pasar de un medio a otro se debe al fenómeno de la refracción, si cada medio tiene distinto índice refractivo. Esto ocurre solo si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios. Este fenómeno se puede observar a pequeña escala, como ocurre al sumergir una parte de una bombilla (pajilla) en un vaso con agua, o al mirar las estrellas y creer que están en cierta posición, cuando en realidad no lo están”.

a. ¿Cómo responderías ahora las preguntas anteriores?
b. ¿Te aporta de alguna manera el párrafo anterior para cambiar tus respuestas?
c. ¿Te ayuda a justificar tus respuestas?
d. ¿qué es el índice de refracción y qué mide?

3. Consideren ahora un supuesto de primer modelo: En nuestro planeta ocurren iteradas refracciones de la luz en el aire, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire –lo cual conlleva un cambio continuo de la dirección del vector de la luz–; en este caso, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que no se haga refracción alguna. Consideren que el rayo de luz de una estrella llega a un lugar específico en la Tierra, donde está parado un observador (punto $\boldsymbol{P}$). La situación se representa en la figura 1.
   a. Incluye un plano cartesiano en la figura. ¿Te ayuda en algo? ¿Por qué?
   b. ¿En qué punto conviene ubicar el origen del plano cartesiano?
   c. Discutan en el grupo y argumenten su decisión.

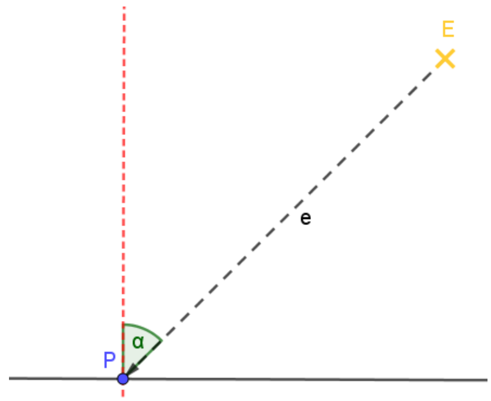


Fig. 1: Esquema primer modelo simplificado

4. Supongan que hay 45° de inclinación entre la recta vertical (respecto de la Tierra) y el rayo de luz, y que la estrella E está a una gran altura respecto de nuestro planeta.
   a. Al no contar con la información exacta de la ubicación de la estrella, ¿cómo podrían determinar la ecuación de la recta recién dibujada?
   b. ¿Qué estrategias podrían seguir? Discutan en el grupo y redacten su mejor aproximación para contestar las preguntas.

5. ¿Podrían determinar la ecuación vectorial de este rayo? ¿Con qué datos necesitan contar? Discutan en el grupo.
   a. ¿Qué punto conocen que pase por el rayo de luz? Indiquen sus coordenadas.
   b. Según su modelo gráfico, ¿cuál es el vector posición para este punto que conocen? Expliquen de forma visual lo que se está haciendo.
   c. Determinen las componentes de un vector director $\vec{e}$ del rayo de la luz, considerando la inclinación de 45°.
   d. Usando el vector posición de P y el vector director, escriban la ecuación vectorial del rayo de luz de esta estrella.
   e. Expliquen cómo se interpreta la ecuación obtenida en el contexto del modelo. Anoten sus conclusiones.

DETERMINANDO ECUACIONES VECTORIALES SEGÚN UN SEGUNDO MODELO

Se sugiere que trabajen en grupo las siguientes actividades.

Suposición segundo modelo: En lugar de iteradas refracciones de la luz en el aire, se simplifica el modelo geométrico y físico con el supuesto de que se haga una sola refracción.

1. Observen la figura 2. En ella se muestra cómo el rayo de luz incidente de una estrella sufre un cambio de posición al refractarse una vez, debido al aumento del índice de refracción con la densidad del aire.

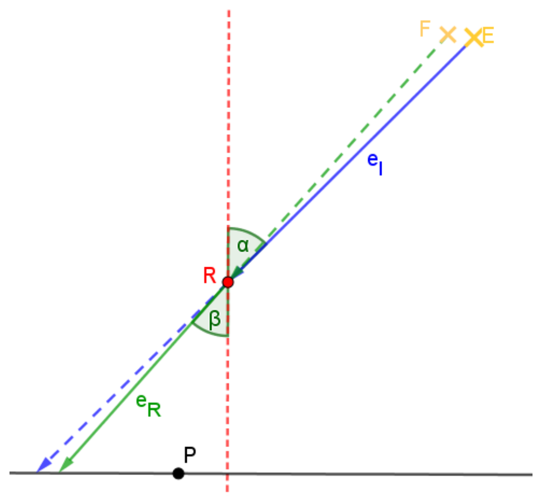


Fig. 2: Esquema segundo modelo simplificado (No a escala)

El ángulo α es el ángulo entre el rayo incidente (azul) en la capa del aire y la perpendicular (línea punteada en rojo). El ángulo β es el ángulo entre el rayo refractado (verde) y la perpendicular.

En este modelo, se considerará que $\alpha = 45°$ y que $\beta = 44{,}98°$.

2. Dibujen nuevamente el esquema anterior, ahora en un plano cartesiano.
   a. ¿Dónde consideran más adecuado ubicar el origen del plano cartesiano? Argumenten su decisión.
   b. ¿Cómo se interpreta el punto R en este contexto? Discutan en el grupo y respondan.
   c. Determinen el vector director de ambos rayos.
   d. Comparen con otros grupos de trabajo y analicen las diferencias y similitudes que pueda haber en los vectores directores, si el plano cartesiano tiene el origen en un punto distinto al que ustedes eligieron.

3. Consideren que la refracción ocurre a $5\ \mathrm{km}$ de altura y a $2\ \mathrm{km}$ horizontalmente, desde donde se ha ubicado el observador.

   a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto R? Discutan en el grupo y respondan.
   b. ¿Cuál es el vector posición del punto R? Discutan y respondan.
   c. ¿Cuál es la ecuación vectorial de los rayos del modelo? Discutan y respondan.

4. Las ecuaciones son muy similares entre sí, ¿a qué se debe? Expliquen.
   a. En el contexto, ¿a qué se debe específicamente la diferencia en ambas ecuaciones? Discutan y respondan.
   b. Matemáticamente, ¿cómo se observa la diferencia entre ambas ecuaciones en el gráfico? Expliquen.
   5. Supongan que una estrella está ubicada a $d = 6\,000\,000\,000 \text{ km}$ aproximadamente respecto del punto R.
   a. ¿Cómo variarían las ecuaciones vectoriales obtenidas anteriormente? Discutan y respondan.
   b. De acuerdo con el contexto del problema, ¿cuál sería la posición en la que un observador vería dicha estrella? Discutan y respondan.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La propuesta de esta actividad se centra en que apliquen las ecuaciones vectoriales para modelar un fenómeno de la naturaleza. Además, se propone que los estudiantes transiten de una situación muy simplificada a una más compleja para que noten que un fenómeno se puede abordar de ese modo y no se requiere estudiarlo de inmediato con todas las variables interactuando.

2. El modelo propuesto está muy simplificado para que los alumnos puedan centrarse en determinar la ecuación vectorial de forma sencilla, pero con sentido. Después se añade algo de dificultad, pero de todos modos muy por debajo del fenómeno real. Como se ha adaptado las consideraciones físicas del contexto, puede ser un desafío continuar con una discusión más profunda al respecto en las próximas clases.

3. Aunque se muestra un camino para determinar uno de los ángulos, usando el índice de refracción, se sugiere dar los valores de los dos ángulos involucrados; en todo caso, el profesor decide qué nivel de profundidad propiciará en clases y cuánto es lo que se puede pedir sobre el tema de refracción, incluyendo o simplificando el sentido físico que tiene o desarrollando otros problemas.

4. El uso del plano cartesiano es fundamental, ya que es el camino para expresar las ecuaciones de las rectas buscadas en su forma vectorial. Se propone que los jóvenes discutan sobre la mejor opción para ubicar el plano, pero de todos modos conviene que lleguen a consensos.

5. En el caso del segundo modelo, se puede hacer una variante y pedirles que determinen la medida del ángulo β, usando información sobre el índice de refracción; ello da una orientación más física al estudio del modelo. El índice n de refracción se representa por la expresión $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Con $n = 1{,}0002$ y un ángulo $\alpha = 45°$ del rayo incidente, se calcula $\sin\beta = \frac{\sin 45°}{1{,}0002}$, por lo que $\beta = 44{,}98°$.

6. A medida que el modelo real se torna más complejo, se puede usar GeoGebra para comprender gráficamente la situación. Además, la herramienta de vectores permite trabajar con las componentes y compararlas.

7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

   - Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica.
   - Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra en línea
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/classic?lang=es

- Para profundizar en el estudio de la refracción
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/snell/snell.htm

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Representan situaciones de movimiento, utilizando vectores y operatoria entre ellos de forma pictórica y simbólica. • Relacionan medidas angulares, la dirección del vector y el desplazamiento, utilizando el modelo vectorial. • Relacionan isometrías y homotecias con vectores para describir y dar soluciones a una situación en forma simplificada.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

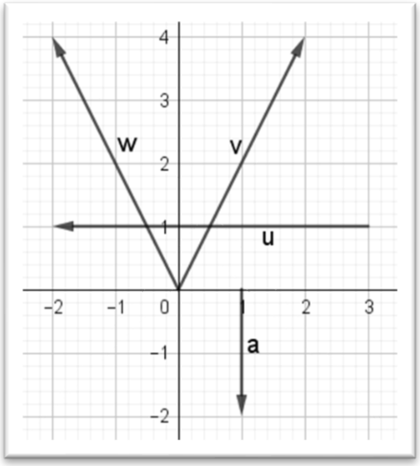
VECTORES, OPERACIONES CON VECTORES Y COMPONENTES

1. Encontrar coordenadas de vectores de forma gráfica y algebraica:

a. Encuentra las coordenadas del vector $\vec{b}$, cuyo punto inicial es $(12; 50)$ y su punto terminal es $(-24; -25\,)$.

b. Si el vector $\vec{c} = \binom{-2}{8}$ tiene como punto inicial $(0;\ 8)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto terminal? Explica cómo respondes a esta pregunta, argumentando con tus conocimientos previos.

c. ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores graficados en el plano cartesiano? Explica.



2. Encontrar y representar los siguientes vectores:
   a. $\vec{v}+\vec{w}$; $\vec{a}+\vec{u}$; $\vec{v}-\vec{w}$
   b. $2\vec{u}$; $-\vec{a}$; $2(\vec{w}-\vec{a})$

3. Determinar las componentes de los vectores en los ejes cartesianos:
   a. Si se conoce la longitud (módulo) de un vector $\vec{p}$ y su dirección θ respecto del eje X, ¿cómo se expresa el vector $\vec{p}$ en sus componentes?
   b. Escribe lo anterior en términos de sus componentes en el eje X y en el eje Y.

REFLEXIÓN USANDO VECTORES Y COMPARACIÓN CON LA HOMOTECIA VECTORIAL

1. En el plano cartesiano, dibuja un triángulo de vértices $A(1;2)$, $B(3;0)$ y $C(-1;-1)$ y luego refléjalo según la recta $x=4$.

2. En el plano cartesiano anterior, dibuja el vector de menor módulo posible que parta de un punto sobre la recta $x=4$ y cuyo punto terminal llegue al vértice A. Nombra $\vec{u}$ al vector
   a. De manera análoga, dibuja los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que lleguen a los puntos B y C, respectivamente.
   b. En el mismo plano, dibuja ahora los vectores $-\vec{u}$, $-\vec{v}$ y $-\vec{w}$.
   c. Señala una forma de obtener una figura que sea reflejo de otra, usando vectores. Argumenta con un dibujo y luego de forma simbólica, utilizando proposiciones sobre vectores.
   d. ¿Cómo son entre sí los vectores que van desde la recta hacia cada vértice? ¿Cuál es el factor por el cual se multiplica cada vector para obtener el punto imagen o punto homólogo?
   e. ¿Desde dónde (qué punto) parte cada vector usado para hacer la reflexión? Señala.

3. Aplica una homotecia al triángulo ΔABC, con factor de homotecia $k=-1$ y con centro de homotecia en el punto que estimes conveniente.
   a. A partir de las respuestas anteriores, compara la reflexión, usando vectores con la homotecia de una figura. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias? Responde con un dibujo ejemplificador.

b. Señala una diferencia relevante entre una transformación isométrica, como la reflexión, y la homotecia vectorial. Argumenta apoyándote en esquemas y ejemplos utilizados anteriormente.

4. En el plano cartesiano anterior, dibuja el vector de menor módulo posible que parta de un punto sobre la recta $x = 4$ y cuyo punto terminal llegue al vértice A. Nombra al vector $\vec{u}$.
   a. De manera análoga, dibuja los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que lleguen a los puntos B y C, respectivamente.
   b. En el mismo plano, dibuja ahora los vectores $-\vec{u}$, $-\vec{v}$ y $-\vec{w}$.
   c. Señala una forma de obtener una figura que sea reflejo de otra, usando vectores. Explica a tu compañero el argumento que usaste en este caso o mediante dibujos.
   d. ¿Cómo son entre sí los vectores que van desde la recta a cada vértice? ¿Cuál es el factor por el cual se multiplica cada vector para obtener el punto imagen o punto homólogo? Explica a tu compañero y redacten una explicación consensuada.
   e. ¿Desde dónde (qué punto) parte cada vector usado para hacer la reflexión?

5. Aplica una homotecia al triángulo ΔABC, con factor de homotecia $k = -1$ y con centro de homotecia en el punto que estimes conveniente.
   a. A partir de las respuestas anteriores, compara la reflexión, usando vectores con la homotecia de una figura. ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias?
   b. Señala una diferencia relevante entre una transformación isométrica, como la reflexión, y la homotecia vectorial.

VECTORES Y SUS COMPONENTES EN LOS EJES DEL PLANO CARTESIANO.

1. Un avión se encuentra volando a una altura de $10\ 000$ metros. En un tramo, la velocidad del viento es de $88\frac{km}{h}$ en dirección noreste de $30°$. A esa altura, el avión va a una velocidad de $850\frac{km}{h}$ respecto del aire. La dirección del avión es $45°$ noreste.
   a. Dibujen la situación anterior en un plano cartesiano, indicando los vectores asociados a la velocidad del viento y a la velocidad del avión.
   b. ¿Qué creen que significa que la velocidad del avión es respecto del aire? ¿Por qué no es respecto de la tierra? ¿Cuál sería la diferencia? Discutan en el grupo y respondan.
   c. Expresen los vectores de las velocidades en forma de sus componentes en el eje X y en el eje Y. ¿Cómo lo hicieron?
   d. Determinen la verdadera velocidad del avión y su dirección respecto del aire.
   e. Representen, de forma manual o digital, la situación anterior con los tres vectores involucrados.
   f. Cambien el vector de la velocidad del viento al sentido contrario, ¿por qué escalar deben multiplicar el vector para invertir el sentido? Argumenten.
   g. ¿Cómo se modifica la velocidad del avión respecto del aire con este nuevo vector de velocidad del viento? Argumenten.
   h. Consideren el viento en la misma dirección y sentido que la velocidad del avión, ¿en cuánto varía la velocidad verdadera del avión en este caso? Discutan en el grupo y respondan.

ECUACIONES VECTORIALES

1. Consideren una recta en el plano cartesiano que pasa por el punto $A(1;-2)$ y, además, un vector de dirección $\vec{u}=\binom{3}{1}$. Con estos datos se puede encontrar dicha recta. Para ello:
   a. Usando un plano cartesiano, marquen el punto A y dibujen $\vec{u}$ en algún lugar del plano.
   b. Dibujen una recta que contenga al vector dibujado. ¿La recta pasa por A? Discutan y respondan.
   c. Dibujen el vector que tiene como punto inicial el origen del plano cartesiano y como punto terminal, el punto A.
   d. Establezcan la ecuación vectorial $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}$, donde $B(x;\ y)$ es otro punto de la recta buscada y $\lambda \in \mathbb{R}$.
   e. ¿Cuál es la ecuación de la recta vectorial buscada? Discutan y respondan.
   f. ¿Cuál es la dirección de la recta encontrada? Compárenla con la dirección del vector $\vec{u}$. Discutan y respondan.

2. Ahora, grafiquen en un plano cartesiano una recta que pase por los puntos $A(3;-1)$ y $B(-2;-2)$.
   a. Determinen la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos (háganlo de la forma “tradicional”).
   b. Ahora determinen la ecuación de la recta vectorial.
   c. Comparen ambas ecuaciones. Geométricamente, ¿qué interpretación tiene cada ecuación? ¿En qué casos hay que usar cada una? Discutan y argumenten su respuesta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Representan y argumentan adiciones y sustracciones de vectores, en forma gráfica y algebraica.			
Resuelven problemas que involucran el producto de un vector por un escalar y lo representan en el plano cartesiano.			
Resuelven problemas de isometrías y homotecias, usando vectores y recursos digitales.			
Construyen y evalúan estrategias para resolver problemas que involucran el modelo vectorial para representar fenómenos.			
Justifican el planteamiento de conjeturas y su validez al resolver problemas que involucran el modelo vectorial para representar fenómenos.			
Resuelven problemas que involucren ecuaciones vectoriales.			