

Actividad 1: Analizar información gráfica en diferentes contextos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes entiendan mejor la media aritmética muestral y la desviación estándar muestral. Se propone explorar la invariancia de la media al modificar la frecuencia en distribuciones simétricas, o sobre la toma de decisiones basadas en la representatividad de la media muestral, y el rol de la desviación estándar y sus propiedades.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

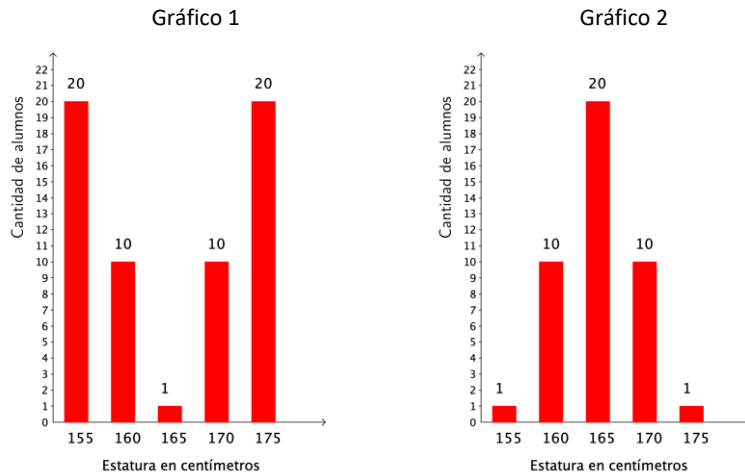
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

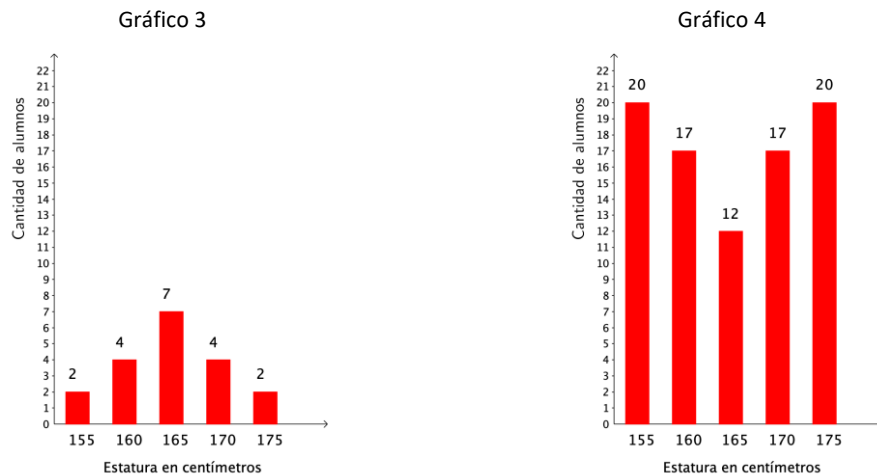
DESARROLLO

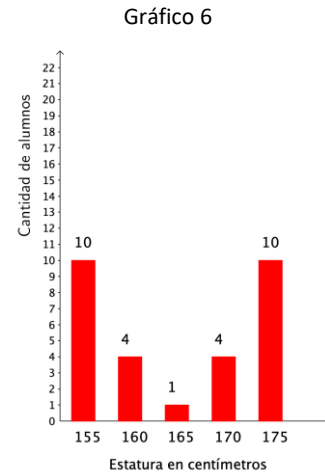
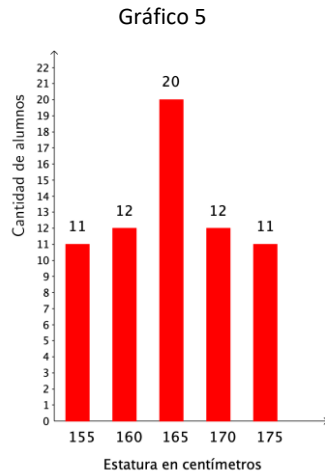
DETERMINANDO LA MEDIA ARITMÉTICA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

- La media aritmética es altamente sensible a varias características de los datos cuantitativos. Para estudiar esto, desarrolla las siguientes actividades:
 - Observa el par de gráficos adjuntos, que resumen las estaturas observadas de dos grupos de 61 y 42 estudiantes, respectivamente, en dos colegios diferentes.



- Determina la media aritmética de cada grupo (observa que estos gráficos son similares a tablas de frecuencias de datos).
 - ¿Es posible decidir si un grupo es más alto que el otro? Explica tu razonamiento.
- Repite el cálculo de la media aritmética para los datos de otros grupos, que se muestran en los cuatro gráficos siguientes:





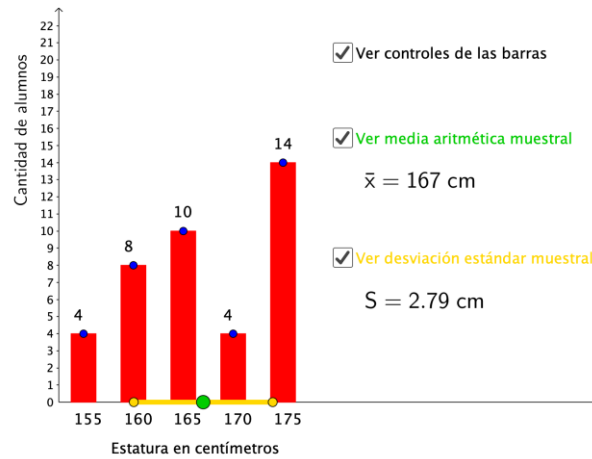
- a. ¿Qué observas en el valor de la media aritmética en cada gráfico?
 - b. ¿Existe alguna característica en la forma de cada gráfico o en la disposición de las barras que cause lo que ocurre con el valor de la media aritmética? Explica tu razonamiento.
3. Determina ahora la desviación estándar en cada uno de los seis gráficos anteriores.
- a. Organiza tus cálculos en la siguiente tabla:

| | Gráfico 1 | Gráfico 2 | Gráfico 3 | Gráfico 4 | Gráfico 5 | Gráfico 6 |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Media aritmética | | | | | | |
| Desviación estándar | | | | | | |

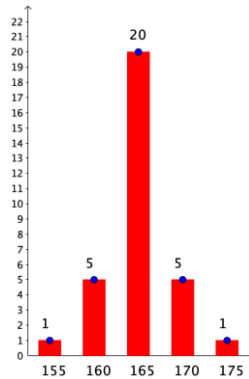
- b. ¿Existe alguna característica en la forma de cada gráfico o en la disposición de las barras que cause lo que ocurre con el valor de la desviación estándar? Explica tu razonamiento.

VISUALIZACIÓN DE LA DESVIACIÓN MEDIA Y ESTÁNDAR DESDE GRÁFICOS

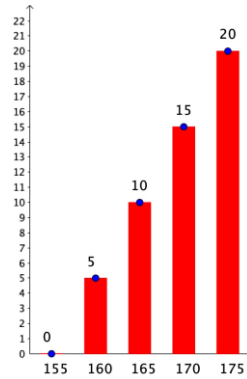
1. La media aritmética es altamente sensible a varias características de los datos cuantitativos.
 - a. Para estudiar esto, abre el *applet* “Visualización media aritmética y desviación estándar” en el siguiente enlace:
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/bdyckssg>.
 - b. Al marcar la casilla “Ver controles de las barras”, aparecerán puntos azules con los que podrás cambiar las frecuencias de los datos. El punto verde representa la media aritmética ubicada entre los datos, y los puntos amarillos (con sus segmentos) representan la desviación estándar de los datos, como el intervalo $[\bar{x} - S, \bar{x} + S]$.



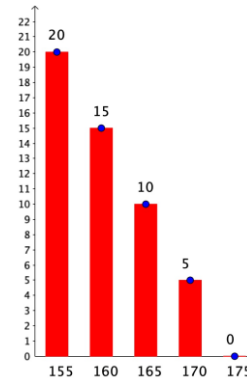
c. Explora cómo se afecta a la media con diferentes distribuciones de datos; para ello, cambia en el *applet* la distribución de algunas parecidas a las que se muestra en los siguientes gráficos, y observa cómo se comporta el valor de la media muestral:



$\bar{x} =$



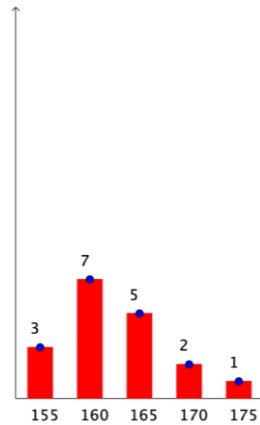
$\bar{x} =$



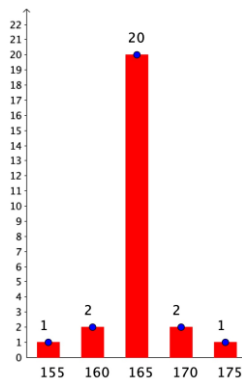
$\bar{x} =$

d. ¿Qué puedes concluir del valor de la media respecto de la forma de la distribución de los datos?

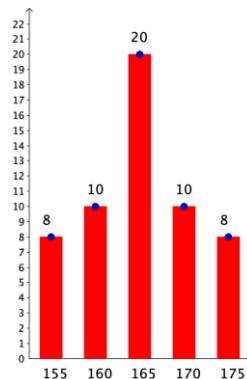
2. Explora cómo varía la media de una muestra cuando uno de los datos tiene una frecuencia demasiado alejada del resto. Para ello, construye en el *applet* un gráfico idéntico al adjunto.



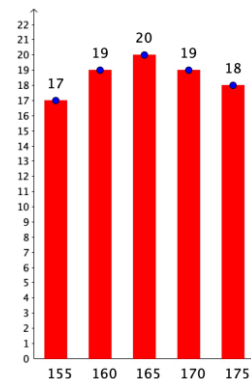
- Modifica la altura de la barra de frecuencia 1 (la última de la derecha) para que la frecuencia cambie a 10. Observa cómo se mueve el punto verde que indica la media de los datos, e identifica el valor que toma.
 - Cambia la altura de la barra que moviste (la de frecuencia 10). Observa cómo se mueve la media de los datos y vuelve a mirar el valor que toma.
 - ¿Cuánto era la media cuando la frecuencia era 1? ¿Cuánto es la media cuando la frecuencia es 20?
 - ¿Cómo cambió la media cuando se modificó la frecuencia de 1 a 20?
 - Compara la media cuando la frecuencia es 1 y cuando la frecuencia es 20. ¿En qué caso es más “razonable” el valor de la media?
3. En el *applet*, cambia la distribución de los datos por las que se muestran en los siguientes gráficos.
- Observa cómo se comporta el valor de la desviación estándar.



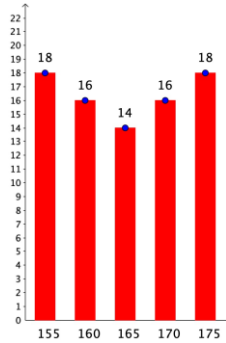
$S =$



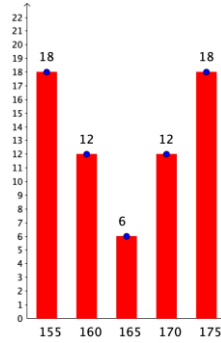
$S =$



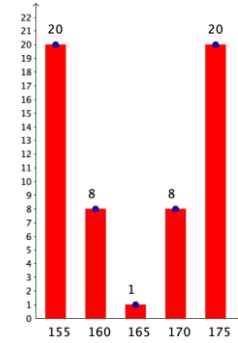
$S =$



$S =$

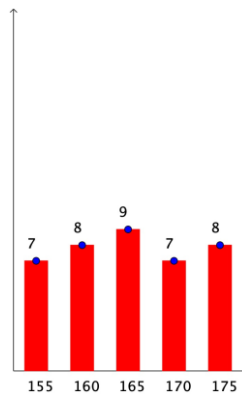


$S =$



$S =$

- b. ¿Qué puedes concluir del valor de la desviación estándar muestral respecto de la forma de la distribución de los datos? Explica tu razonamiento.
4. Explora cómo varía la desviación estándar de una muestra cuando uno de los datos tiene una frecuencia demasiado alejada del resto. Para ello, construye en el *applet* un gráfico idéntico al que se ve adjunto.



- Cambia las alturas (frecuencias) de las barras y observa cómo se mueve la barra amarilla, que indica la desviación estándar de los datos. Identifica el valor que toma.
 - Cambia a cero la frecuencia de los datos 155, 170 y 175. Observa cómo se mueve la desviación estándar de los datos y luego identifica el valor que toma.
 - ¿Cuánto era la desviación estándar antes de cambiar las frecuencias?
 - ¿Cuánto es la desviación estándar después de cambiar las frecuencias?
 - Interpreta la desviación estándar cuando la frecuencia tenía el primer valor y cuando tomó el segundo valor.
5. Determina cuál es el valor máximo y el valor mínimo que puede alcanzar la media muestral para los datos que se usa en los gráficos. ¿Cuáles serían estos mismos valores para un conjunto cuantitativo cualquiera de datos respecto del valor mínimo y del valor máximo de ellos? Justifica tus respuestas.

ANALIZAR GRÁFICOS

A partir de los datos y de lo estudiado en la primera actividad, realicen las siguientes actividades:

1. Construye dos gráficos de barras que tengan formas diferentes, pero que, con los datos que representan, se obtenga $\bar{x} = 166$ (no importa el valor de la desviación estándar). Puedes utilizar el *applet* para explorar, verificar y justificar las soluciones.
 - a. Explica la estrategia que seguiste para hallar los dos gráficos pedidos en la pregunta anterior y justifica las decisiones que tomaste en el proceso.
 - b. Utiliza el *applet* para construir dos gráficos diferentes: el primero con una desviación estándar menor a 3, es decir, $S < 3$, y el segundo con $S > 8$. Justifica por qué los gráficos cumplen estas condiciones.
 - c. Si en un gráfico se considera simultáneamente la media muestral y la desviación estándar muestral, ¿cómo debiese ser la distribución de sus datos para que la media sea muy representativa de los datos de la muestra? Justifica tu respuesta.
 - d. Busca en la prensa o en algún sitio web que reporte estadísticas con gráficas, una situación que te interese y, con base en ella, indaga si la media es muy representativa o poco representativa en ese caso.

ANALIZANDO PROPIEDADES

1. La media aritmética y la desviación estándar poseen algunas propiedades interesantes. Analiza cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.
 - a. Si la media aritmética de los datos de una muestra es $\bar{x} = 5,6$ y se suma a todos los datos un valor constante, como 1,2, la media aritmética resultante es $\bar{x} = 5,6 + 1,2 = 6,8$. En general, $\overline{x + a} = \bar{x} + a$, si $a \in \mathbb{R}$.
 - b. Si la media aritmética de los datos de una muestra es $\bar{x} = 4,3$ y se multiplica todos esos datos por un valor constante, como 2, la media aritmética resultante es $\bar{x} = 4,3 \cdot 2 = 8,6$. En general, $\overline{x \cdot a} = \bar{x} \cdot a$, si $a \in \mathbb{R}$. Asumiendo que esa fórmula es verdadera, ¿se podría deducir que $\overline{\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\bar{x}}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?
 - c. ¿Es cierto que $\overline{x^2} = (\bar{x})^2$? Utiliza ejemplos numéricos para argumentar su veracidad.
2. Si S es la desviación estándar de una muestra y $a \in \mathbb{R}$ es un valor cualquiera, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 - a. Si se suma a a todos los datos de una muestra, entonces su desviación estándar es $S + a$.
 - b. Si se multiplica todos los datos de una muestra por a , entonces su desviación estándar es $S \cdot a$.
 - c. Si se divide todos los datos de una muestra por a (con $a \neq 0$), entonces su desviación estándar es $\frac{S}{a}$.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 2 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos sobre la media aritmética. Algunas de las preguntas e instrucciones pueden ser:
 - Describe las medidas de tendencia central más utilizadas.
 - ¿Qué entiendes por promedio y media aritmética?
 - ¿En qué casos se utiliza el promedio?
 - Hace un listado de notas de todo un año de la asignatura que más te guste. Determina la media aritmética de estas notas y compara con tu compañero. ¿en qué casos sirve la comparación?
 - Basándote en tu promedio de Matemática del año pasado, busca a un compañero que tenga la misma media aritmética que tú al aproximar al entero. Busquen juntos algunas alternativas y criterios para ver quién de los dos podría ser seleccionado cómo el mejor de la asignatura.
 - Si hubiera que elegir a un deportista por su esfuerzo y hay dos mejores con igual promedio en su rendimiento, ¿qué harías?
2. Se recomienda tratar la desviación de una variable con respecto a otro dato, y la desviación de una variable con respecto a su media junto con la desviación media, y destacar en un gráfico lo que se hace e interpreta según el contexto.
3. En el análisis de gráficos, se propone estudiar la media que se produce cuando los datos tienen una distribución simétrica. Conviene enfatizar que ni la cantidad de datos ni el valor de ellos altera el valor de la media aritmética cuando la forma del gráfico es simétrica.
4. Cabe dejar que los estudiantes exploren que, mientras más alejados estén de la media, tendrán mayor desviación estándar y mientras más agrupados estén alrededor de la media, menor será su desviación estándar.
5. Se recomienda que indaguen la propiedad que tiene la media aritmética respecto de los límites; a saber: la media aritmética es siempre mayor o igual al valor más pequeño de los datos y menor o igual al valor más grande de los datos.
6. Otra propiedad a indagar se refiere a la representatividad de la media aritmética muestral, lo cual ocurre cuando la desviación estándar es pequeña (mientras más pequeña, más representativa es la media muestral).

7. Tienen que calcular la media muestral según la expresión $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{n}$ si los n datos x_i están agrupados en tabla, con k frecuencias absolutas f_i . Se sugiere que hagan estos cálculos paso a paso desde la tabla, de manera manual o usando la planilla de cálculo:

| x_i | f_i | $f_i \cdot x_i$ |
|-------------|-------|-----------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| <i>SUMA</i> | | |

8. La desviación estándar muestral (S) se debe calcular con la expresión $S = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (\bar{x} - x_1)^2 + f_2 \cdot (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + f_k \cdot (\bar{x} - x_k)^2}{n-1}}$, si los n datos x_i están agrupados en k frecuencias absolutas f_i . En este caso, se utiliza el denominador $n - 1$ por ser muestral, y no el denominador n que se usa para la desviación estándar poblacional. Se sugiere que hagan estos cálculos paso a paso desde la tabla, de manera manual o usando la planilla de cálculo:

| x_i | f_i | $(\bar{x} - x_i)^2$ | $f_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$ |
|-------------|-------|---------------------|-------------------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| <i>SUMA</i> | | | |

9. Aunque los cálculos son importantes, conviene orientar el trabajo a los aspectos más cualitativos que pueden obtener de la muestra que analicen. Por ejemplo: se espera que identifiquen qué tan representativa es la media aritmética de una muestra si se conoce su desviación estándar, o lo poco informativo que es tener a la vista sólo la media aritmética.
10. Se recomienda que indaguen lo siguiente:
- La media siempre estará acotada entre el menor y el mayor valor de los datos; es decir, si m es el valor mínimo de los datos y M el mayor de los datos, entonces $m \leq \bar{x} \leq M$.
 - La desviación estándar siempre será mayor que cero, es decir, $S > 0$, pero no tiene un valor máximo que la acote.
11. El objetivo final es trabajar más analíticamente con la media muestral y la desviación estándar muestral, atendiendo a sus propiedades y su verificación. Se sugiere que los alumnos comprendan lo que estos estadísticos informan, en cuanto a los rangos en que se mueven y cómo los afectan las distribuciones de datos.

12. Dado que uno de los objetivos de la unidad 2 es OA2 (Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales), se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los jóvenes para evaluar el proceso de resolver problemas en esta unidad:

| Criterios | Totalmente logrado | Medianamente logrado | No logrado |
|--|--|---|---|
| Identifican las variables del problema. | Identifican las características y los datos dependientes. | Identifican información numérica correspondiente al problema. | Anotan información. |
| Identifican los estadísticos que se debe usar para resolver el problema. | Identifican el problema central, mencionando el estadístico que se debe calcular (media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, correlación muestral), y declaran los problemas y cálculos subyacentes. | Identifican el problema central, mencionando el estadístico a utilizar (media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, correlación muestral). | Identifican un problema que corresponde a otros datos. |
| Resuelven problemas relacionados con media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral. | Calculan la media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación o correlación muestral, según el problema presentado. | Calculan la media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación o correlación muestral. | Realizan cálculos con los datos presentados en el problema. |
| | Interpretan los resultados según la situación presentada y dan respuesta al problema. | Escriben los resultados de sus cálculos o interpretan parcialmente el problema. | Escriben números asociados a otros cálculos. |

13. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

- Resuelven problemas que involucran analizar datos estadísticos con medidas de dispersión.
- Interpretan información que involucra los conceptos de media, desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.
- Interpretan información que involucra la correlación muestral entre dos variables.
- Resuelven problemas que involucran la correlación muestral entre dos variables.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Applet “Visualización media aritmética y desviación estándar”
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/bdyckssg>.
- Media aritmética
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sangakoo.com/es/temas/media-aritmetica>
- Varianza y desviación típica
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>
- Media, moda y mediana
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/probability/data-distributions-a1/summarizing-center-distributions/e/mean_median_and_mode
- Calcular la desviación estándar paso a paso
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/probability/data-distributions-a1/summarizing-spread-distributions/a/calculating-standard-deviation-step-by-step>