Actividad 4: Aplicaciones de la geometría en arquitectura y construcción

PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes representen y elaboren modelos con herramientas digitales, referidos al tratamiento algebraico y geométrico de la intersección entre rectas y planos en el espacio 3D. Se espera que les interesen las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual o social; en este caso, para la argumentación o demostración de propiedades geométricas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Crear aplicaciones y realizar análisis mediante procesadores simbólicos, de geometría dinámica y de análisis estadístico.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

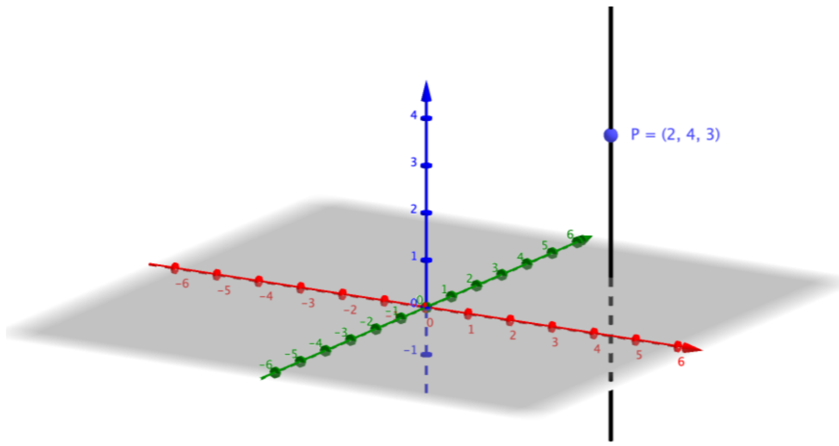
Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

DEL PLANO A 3D

Para el tratamiento de las intersecciones en el plano y en el espacio 3D, se puede emplear construcciones geométricas euclidianas, recursos de la geometría analítica y la geometría vectorial. Los procedimientos de la geometría analítica permiten usar recursos del álgebra al trabajar con intersecciones de rectas en el plano, o intersecciones de planos en el espacio.

1. Entra a GeoGebra 3D y grafica la recta del ejemplo: $X = (2, 4, 3) + \lambda(0, 0, 1)$.



2. Cambia el *sentido* del vector director de la recta anterior y observa qué le sucede a la recta (por ejemplo, cambia $(0, 0, 1)$ por $(0, 0, -1)$). Luego, modifica el *módulo* del vector director de la recta anterior y observa qué le sucede a la recta; por ejemplo: cambia $(0, 0, 1)$ por $(0, 0, 4)$ o por $(0, 0, -6)$. Relaciona lo que cambiaste en el vector director con lo que le ocurrió a la recta cuando lo hiciste.

3. En GeoGebra, grafica el plano $\Pi: -2x - y + 3z = 6$.
   a. ¿Cuál es el vector normal al plano Π?

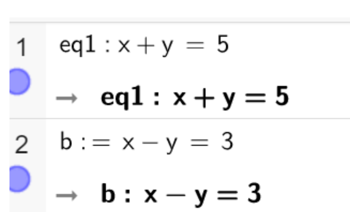
   b. Observa cómo se comporta el plano cuando se modifica el factor de x por cada uno de los valores -1, 0, 1.

   c. Observa cómo se comporta el plano cuando se modifica el factor de y por cada uno de los valores -1, 0, 1.

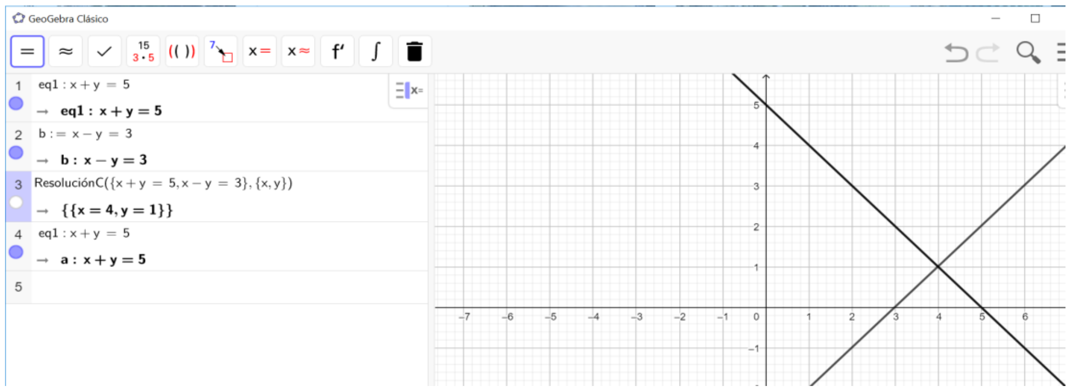
   d. Observa cómo se comporta el plano cuando se modifica el factor de z por cada uno de los valores -1, 0, 1.

   e. Observa cómo se comporta el plano cuando se modifican los factores de x, de y y de z por el valor 0. ¿Qué puedes concluir?

4. Comencemos por la intersección de dos rectas en el plano. Abre GeoGebra 6, activa el ambiente CAS e ingresa las ecuaciones $x + y = 5$ y $x - y = 3$.



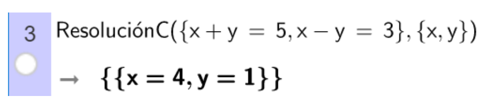
Si oprimes los botones azules a la izquierda, aparecen las rectas en la vista gráfica, como en la figura.



En el ambiente CAS de GeoGebra, resuelve el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones que ingresaste:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

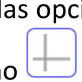
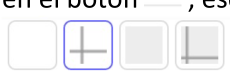
Para esto, ingresa el comando ResoluciónC({x+y=5,x-y=3},{x,y}). GeoGebra te mostrará la solución de la siguiente manera:



Estos valores son las coordenadas del punto de intersección de las rectas en el plano. Así, tenemos una representación gráfica y una algebraica de una intersección de rectas en el plano.

5. Usa el ejemplo anterior y haz el proceso manualmente.
   - Escribe el sistema de ecuaciones.
   - Resuélvelo.
   - Crea la gráfica.

Las siguientes ecuaciones de planos construyen un boceto de un edificio que se asemeja a un paralelepípedo. Por simplicidad, se ha considerado inicialmente sólo las cuatro caras laterales.

6. Abre GeoGebra 6 y activa la vista gráfica 3D. Abre las opciones de la vista gráfica 3D, haciendo clic en el botón , escoge la opción sistema cartesiano  y en ella, haz clic en la opción "sólo ejes" .

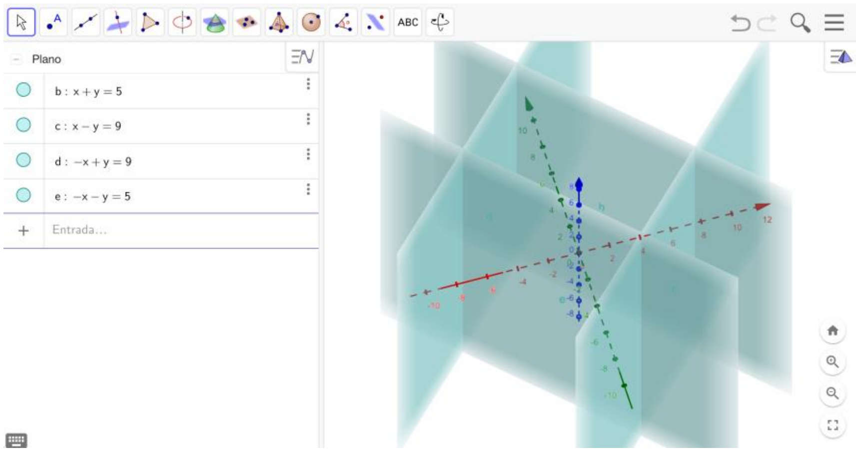
7. Las ecuaciones que trabajaste en el punto 1. representan rectas en el plano. En el espacio 3D, las mismas ecuaciones pueden representar planos. Ingresa en GeoGebra las ecuaciones de planos que se muestra a continuación; debería quedarte una construcción similar a la imagen adjunta:

$$x + y = 5$$

$$x - y = 9$$

$$-x + y = 9$$

$$-x - y = 5$$



8. Rota el sistema diédrico hasta ver el eje Z (el eje azul) como un punto. Observa cómo se ven los planos desde ese punto de vista. Compara la visualización que tienes aquí con la del plano y las rectas del punto 1. Nota que parecen rectas en el plano, pero son planos en el espacio.

9. Resuelve los sistemas de ecuaciones que se generan al intersectar las ecuaciones de dos planos; puedes usar GeoGebra. Anota los resultados en la siguiente tabla:

Planos que se intersectan		Valores obtenidos
$x + y = 5$	$x - y = 9$	
$x + y = 5$	$-x + y = 9$	
$-x - y = 5$	$x - y = 9$	
$-x - y = 5$	$-x + y = 9$	

a. ¿Qué elemento geométrico es la intersección de los planos que ingresaste en GeoGebra?

b. Intercepta los planos que tienes en el sistema diédrico. Usa la herramienta Intersección de dos superficies  de GeoGebra para hallar todas las intersecciones entre dos planos. Observa el objeto que se obtiene como resultado de cada intersección. A continuación, anota las ecuaciones vectoriales que se tiene en cada caso:

Planos que se intersectan		Ecuación vectorial obtenida
$x + y = 5$	$x - y = 9$	
$x + y = 5$	$-x + y = 9$	
$-x - y = 5$	$x - y = 9$	
$-x - y = 5$	$-x + y = 9$	

10. Relaciona los valores obtenidos con su respectiva ecuación vectorial obtenida con GeoGebra.

11. Nota que las soluciones no dependen del valor de Z. ¿Qué significa esto? ¿Cómo se escribe algebraicamente una ecuación que es independiente de los valores de Z?

En las siguientes tareas, se sugiere que trabajen en grupos.

1. En la misma construcción en que están los planos y las rectas correspondientes a las intersecciones entre ellos, construyan puntos que se muevan en las rectas. Básense en las siguientes indicaciones:
   a. Creen un deslizador, ingresando el texto $k = 1$ en la entrada y presionen Enter.
   b. Asignen letras mayúsculas a las ecuaciones vectoriales de las rectas que hallaron e ingrésenlas en GeoGebra (usando el parámetro k).
   c. Muevan el deslizador k y observen cómo, al variar sus valores, los puntos recorren las rectas.

2. Imaginen que el espacio que encierran los cuatro planos es un edificio, y que se mide su altura en pisos con cada valor entero del eje Z.
   a. Exploren con el deslizador el intervalo aproximado de valores que debe tener k para que el edificio tenga tres pisos, cinco o diez (para esto último, deberán extender los valores del deslizador en sus configuraciones).
   b. Escriban las ecuaciones de recta que modelan las aristas laterales del edificio.
   c. Anoten sus resultados en una tabla:

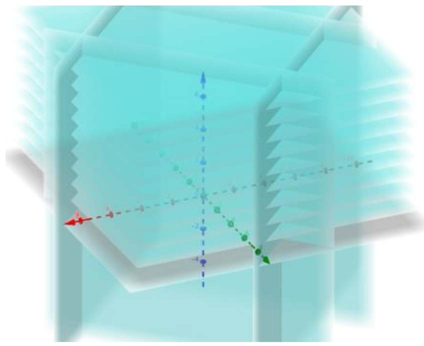
Ecuación vectorial de la recta	Intervalo al que pertenece λ

3. Usen las mismas ecuaciones de planos que se muestran en 3b y grafíquenlas en GeoGebra 3D:

$$x + y = 5 \qquad -x + y = 9$$

$$x - y = 9 \qquad -x - y = 5$$

Suponiendo que el espacio que encierran los cuatro planos es un edificio habitacional, determinen las ecuaciones de los planos que formarían las plantas de los pisos que pasan por las coordenadas enteras del eje Z, desde 1 hasta 9.



a. Determinen las ecuaciones de los planos que servirían de piso y de techo del edificio y grafíquenlos en GeoGebra.
b. Modifique la ecuación del plano de una de las caras del edificio, de modo que quede oblicua (no perpendicular al plano XY, pero que siga existiendo el techo; es decir, que no desaparezca al inclinar demasiado el plano escogido).
c. Modifiquen la ecuación de la cara opuesta a la que inclinaron, para que se intercepten justo en el techo del edificio.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere iniciar la actividad proyectando las instrucciones para la actividad, alternadas con una proyección del procesador. Modele en la pizarra la asignación de letras mayúsculas a las ecuaciones vectoriales de las rectas que hallaron en la primera actividad, y pídales que las ingresen en GeoGebra (usando el parámetro k). Por ejemplo: si la recta $X = (-2,7,0) + \lambda\,(0,0,-2)$ proviene de la intersección de los planos $x + y = 5$ y $-x + y = 9$, entonces ingresen el punto $P = (-2,7,0) + k\,(0,0,-2)$. Repita el ingreso de los otros tres puntos que pertenezcan a las otras tres rectas.

2. Comente el sentido de la actividad: mostrar algunos edificios que se puedan modelar por medio de paralelepípedos, troncos de pirámide u otros cuerpos geométricos.

3. Revise los conceptos y procedimientos necesarios, alternados con construcciones con GeoGebra.

4. Durante la sesión, se empleará nociones como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, ecuación de una recta en 2D y de un plano en 3D. GeoGebra usa una representación vectorial de la recta. En las construcciones, se usa ángulos diedros, de rectas y planos perpendiculares y paralelos.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Utilizan programas para verificar teoremas relacionados con la geometría.
    - Modifican algunas aplicaciones para analizar las características de las figuras.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Ecuación vectorial de la recta
  https://youtu.be/RV3TFyVrYBs

- Rectas y planos en el espacio
  https://www.geogebra.org/m/Ght27Hfp

- El plano en el espacio
  http://www.ieszaframagon.com/matematicas/matematicas2/geometria_afin/2_ecuaciones_de_un_plano.html