ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 6: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA Y OPTIMIZACIÓN

OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA 4: Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

PREGUNTAS ESENCIALES

a.- ¿Qué avances científicos fueron posibles al medir la rapidez instantánea de un cambio?

a.- ¿Qué información agrega la inflexión de un cambio al estudiar un fenómeno?

PROPÓSITO

Esta actividad tiene como objetivo aplicar la derivación de una función compuesta involucrada en la modelización de una situación de la economía y construcción que requiere la determinación de un mínimo local de una función que se desarrolla mediante la información entregada. En el proceso de la elaboración se debe aplicar el teorema de Pitágoras. Así, la actividad cubre un amplio espacio curricular de las Bases Curriculares de 7° básico a 4° medio. Según el contexto, la actividad es altamente apta para alumnos que están en colegios del sistema Técnico Profesional.

DURACIÓN	CONEXIÓN
Actividad individual: 1 hora pedagógica Actividad colaborativa: 2 horas pedagógicas	Con el mundo empresarial de las PYME en el contexto de la minimización necesaria de los gastos de una construcción.

CONTEXTO

Para planificación de un conducto de agua hacia una casa rural ubicada, fuera del área de una urbanización, la empresa encargada de las obras necesita realizar un estudio de elegir el trazado del conducto menos costoso para generar la mayor ganancia en el proyecto.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A. ACTIVIDAD INDIVIDUAL: OBTENER LA DERIVADA UNA FUNCIÓN COMPUESTA.

1. Se consideran la función f con $f(x) = x^2$ y la función g con g$(x) = 2$x.
a. Determina la ecuación de la función $(f \circ g)$con $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
b. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra elabora el gráfico de f y de $f \circ g$ en el mismo sistema de coordenadas.
c. Grafica de forma aproximada en los lugares $x_1 = 0{,}5$ y $x_2 = -1$los tangentes en el gráfico de$f$ y $f \circ g$. Determina gráficamente las pendientes de las tangentes consideradas.
d. ¿Qué propiedad entre las tangentes de f y $(f \circ g)$se puede observar? Contesta mediante una frase completa.
e. Determina la derivada de las funciones f y $(f \circ g)$.
f. Calcula las siguientes derivadas: f(0,5), f'(-1), $(f \circ g)(0{,}5)$, y $(f \circ g)(-1)$
g. Con los resultados de la actividad f verifica la regla de la derivada de una función compuesta.

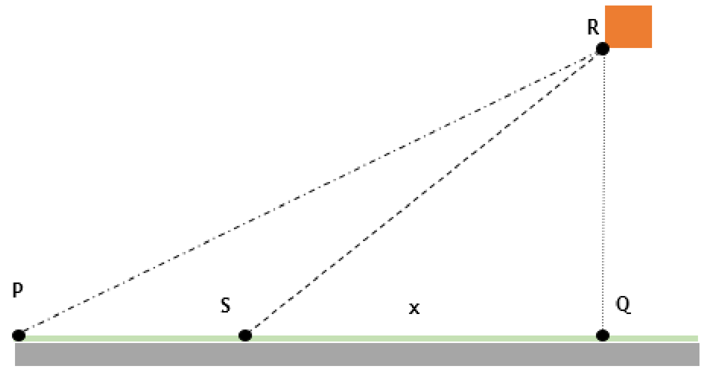
2. Determina la derivada de las siguientes funciones compuestas.
a. f con $f(x) = sin(0{,}5x + \frac{\pi}{2})$
b. g con $g(x) = e^{2x^2-1}$
c. h con $h(x) = (4x-1)^5$
d. k con $k(x) = \sqrt{3x^2 - x}$

Se recomienda que los alumnos igualen por partes la derivada de la expresión x^m con $2x$ y la derivada de ax con -3. Después se verifican los resultados por derivación.

3. La derivada de una función compuesta tiene la ecuación $(f \circ g)' = (2x-3)\sin(x^m + ax)$. Determina los parámetros de m y a.

B. ACTIVIDAD COLABORATIVA: APLICAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA EN UN CONTEXTO DE DESAGÜES.

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecte una casa rural a un servicio del agua y desagüe ya existente, que está lejos de la casa. En el dibujo esquemático de abajo se muestra la ubicación de la casa cuyo terreno se extiende hacia una calle vecinal dibujada por la franja gris.



El servicio existente de agua y desagüe llega hasta el punto P al lado de una calle que sigue en dirección Q. La casa R tiene la distancia QR más corta de la calle de 300m. El segmento PQ tiene el largo de 500m. Debido a la situación geológica del suelo, los costos estimados por metro corriente de la nueva conexión directamente al lado de la calle son de 3UF y por el terreno hacia la casa son de 6UF. Como la empresa quiere maximizar las ganancias, se modela la conexión determinando el punto S al lado de la calle, en el cual se debe iniciar la bifurcación del conducto hacia la casa rural.

a. Determinen los costos que se generarían en la construcción vía el trazado directo PR.

b. Determinen los costos que se generarían en la construcción vía el trazado compuesto PQ u QR.

c. Determinen los costos que se generarían en la construcción vía el trazado compuesto PS u SR con $x = 450m$.

d. Determinen los costos que se generarían en la construcción vía el trazado compuesto PS u SR con $x = 350m$.

e. Elaboren la ecuación de la función C, que modela los costos de la conexión a la casa en dependencia de x.

f. Determinen la derivada C'de la función C aplicando la regla de la función compuesta.

g. Determinen el valor de x_{min} para el cual los costos lleguen a un mínimo.

h. Conjeturen acerca de la condición bajo la cual la conexión directa PR del conducto esté la más barata. Argumenten y comuniquen la conjetura.

i. Si los costos en la construcción del conducto a través del terreno aumentan más y más en comparación con los costos al lado de la calle, ¿en qué dirección se mueve el lugar x_{min} en el dibujo esquemático que determina el punto S de la bifurcación? Expliquen y argumenten sin realizar cálculos.

En h. se espera que los alumnos mismos argumenten, que, con el mismo precio en ambos terrenos, el trazado más corto también tiene los costos mínimos.

En i. se espera que los alumnos mismos descubran, que se debe minimizar el trazado que va por el terreno. Esto implica que x_{min} se acerca al punto Q.

ORIENTACIONES PARA LA ACTIVIDAD DE AULA

1. Se recomienda iniciar la actividad individual con la elaboración de gráficos de una función cuadrada compuesta con una función lineal.
2. Se grafican aproximadamente las tangentes de gráficos en distintos lugares, tanto de la función f como $f \circ g$. Así se repite la interpretación geométrica de la derivada en un lugar.
3. Estimando las pendientes de las tangentes se verifica la regla, ya conocida, de la derivación de una función compuesta.
4. Para saber resolver la actividad colaborativa de la segunda parte, es importante realizar derivaciones de algunas funciones transcendentes compuestas con funciones lineales o cuadráticas.
5. La actividad 2. Es un poco desafiante porque se debe determinar la antiderivada de una función f a partir su forma derivada. Esto requiere invertir un proceso conocido, que en el caso de polinomios es verificable por una nueva derivación.
6. Para la actividad colaborativa se recomienda formar grupos en los cuales se trata de encontrar una solución del problema de minimización, elaborando una función que modele la situación.
7. No se considera la verificación de la existencia de un mínimo local mediante la 2ª derivada de C.
8. Para tener números no tan altos, es necesario, que calculan los costos en UF por los trazados indicados. Para obtener una idea de la dimensión de los costos, se recomienda transformar al final de los cálculos en UF el valor en pesos chilenos. (1UF ≈ $27 500)
9. Para fomentar la habilidad de modelar (cambio de modelos a situaciones diferentes) se recomienda una argumentación intensa acerca del cambio del lugar de x_{min}.
10. Para el cierre de las actividades, pregúnteles ¿qué les pareció la actividad?, ¿qué les fue más difícil?, ¿cómo resolvieron las actividades?, ¿les fueron útiles las sugerencias dadas por el docente?, ¿pueden transferir lo aprendido a problemas cotidianos?
11. Apoye a los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades, observe su trabajo e interacción. No entregue las respuestas, haga preguntas para orientar la búsqueda de las soluciones.
12. Tras plantear un problema, deles, en primer lugar, un lapso para entenderlo. Luego, permítales que hagan ensayo y error como estrategia: que experimenten, que conjeturen, que pongan a prueba sus estrategias. Ello les ayudará a entender, preguntarse, cuestionarse si algo no resulta. Es natural que los progresos sean muy diferentes. Sugiera cómo pueden avanzar los que tuvieron dificultades. Valore lo realizado, sea lo que sea que han logrado.
13. La actividad colaborativa es una muy buena oportunidad para que los estudiantes expresen su propia imaginación y creatividad, que ejerciten sus habilidades, que busquen información, arriesguen estrategias, que desarrollen su pensamiento matemático ([según el caso:] o

computacional, o estadístico, o probabilístico, o geométrico, o analítico). La situación es propicia para la creación de un ambiente de creación.

14. Observe a los jóvenes trabajando. Acérquese si hay preguntas, o si observa a alguno detenido, especialmente si observa signos de frustración o de no saber cómo actuar, y también a quienes que avanzan y muestran progreso. Ante un estancamiento, evite expresiones generales tales como "tú puedes hacerlo" (el estudiante cree o siente que no puede, y no está pudiendo), y prefiera hacer preguntas-sugerencias específicas, relacionadas con la dificultad que el estudiante enfrenta. Aliente y reconozca los logros –públicamente, más bien hacia el final–.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_3.htm
- https://es.wikihow.com/derivar-la-ra%C3%ADz-cuadrada-de-X
- https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points

Sitios web sugeridos para estudiantes

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_3.htm
- https://es.wikihow.com/derivar-la-ra%C3%ADz-cuadrada-de-X
- https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Luego de la actividad individual

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación

- Verifican algebraica como gráficamente las derivadas de funciones f con f(x) = x^q de base x real y exponente q racional, de la función exponencial, seno y coseno.

Actitudes

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Se sugiere verificar que los alumnos interpreten geométricamente la derivada en un lugar x_i .
- Es clave que los alumnos estén capaz de distinguir entre función interior y exterior de una función compuesta.
- Para derivar funciones compuestas, los alumnos deben dominar las reglas para la derivación de las funciones transcendentes como trigonométricas y exponenciales.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Reforzar conceptos o procedimientos.** Cuando no se ha tenido el éxito esperado con la actividad propuesta, es necesario considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de refuerzo**, en las que se pueda volver a revisar los aspectos clave respecto a la derivada de funciones compuestas.

-**B. Continuar con la actividad tal como está diseñada.** Desarrollar la **actividad colaborativa** para profundizar en el OA propuesto a partir de lo trabajado individualmente.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE REFUERZO: DETERMINAR LAS DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS.

Se sugiere al docente proponer actividades como las siguientes:

1. Determina la pendiente de la tangente del gráfico de f con $f(x) = 2x^3$ en el lugar $x_1 = -1$
2. Determina las ecuaciones de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.
   a. f con $f(x) = \frac{1}{x^2}$, g con $g(x) = \sin x$
   b. f con $f(x) = \sqrt{x}$, g con $g(x) = x^2 + 1$

3. Determina la derivada de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ de la actividad 2.

Luego de la actividad colaborativa

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación

- Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento y puntos de inflexión.
- Resuelven problemas de optimización en contextos diversos como geometría, ciencias y economía.

Actitudes

- Manifestar flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias, considerando además que el error es una oportunidad para aprender.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Considerando, que la actividad colaborativa requiere la modelización de una situación, el énfasis está en la elaboración de la función que modela la situación.
- En el caso, que los alumnos no logren la elaboración de la función de los costos del conducto, se puede dar la función: C con $C(x) = (500 - x) \cdot 3 + \sqrt{300^2 + x^2} \cdot 6$
- Así los alumnos pueden seguir con la segunda parte de la actividad que consiste en la minimización de los costos C mediante la derivación de la función y la posterior igualación de la derivada $C´$ a 0, que lleva a una ecuación con una raíz cuadrada que se transforma finalmente en una ecuación cuadrática.
- Para una mejor conexión con a la realidad, se recomienda traspasar el resultado desde los UF al peso

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Mayor desafío.** Cuando las actividades individual y colaborativa han sido desarrollas con éxito y fluidez, sería pertinente plantear un desafío que amplíe ligeramente los límites del OA. Para ello se pueden considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de desafío** que se muestra a continuación.

- Preguntas esenciales

Al final de cada una de las actividades invite a los estudiantes a responder una o más de las preguntas esenciales.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD O PREGUNTA PARA CONSTATAR EL LOGRO DE HABILIDADES: ENCONTRAR EXTREMOS RELATIVOS EN FUNCIONES

La actividad colaborativa tiene como principal propósito modelar una situación de la economía que involucra el proceso de optimización mediante la derivada de una función.

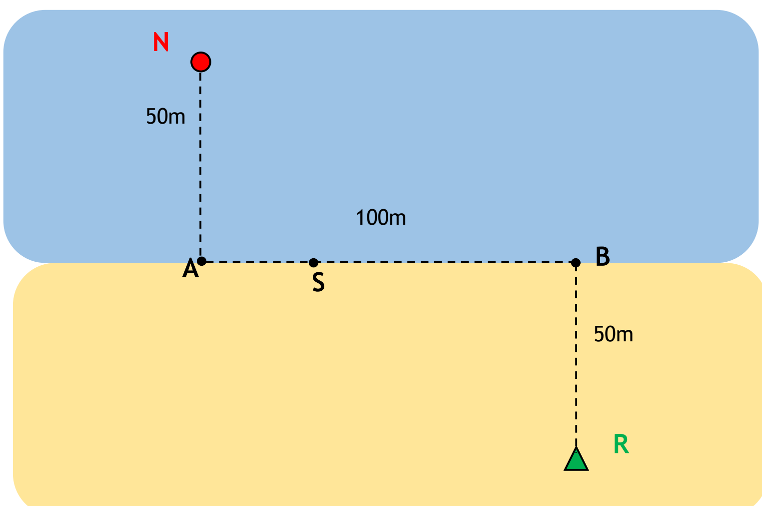
Para un mejor entendimiento del concepto se realiza la siguiente actividad.

Sean f, g definidas por $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^2$, $g(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$, respectivamente. ¿Cuál de las funciones tiene un extremo relativo en el lugar $x_0 = 4$?

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DESAFÍO: OPTIMIZAR TIEMPOS EN UN RESCATE

Para profundizar en el aprendizaje se sugiere al docente proponer actividades tal como:

En una playa apta para el baño y con vigilancia se produce una emergencia involucrando a un nadador. La situación se muestra en el dibujo esquemático de abajo.



La actividad tiene una similitud con la actividad colaborativa, pero incluye más consideraciones, como el traspaso desde una ubicación en medio de un "terreno" a una ubicación en medio de otro "terreno". Además, se debe expresar el desplazamiento "d" en los diferentes "terrenos" mediante la ecuación lineal $d(t) = v \cdot t$, en la cual la variable v representa la velocidad y t el tiempo.

El nadador está 50m mar adentro y el rescatista está también a una distancia de 50m frente a la orilla del mar. El largo del segmento AB es de 100m. Se estima que la velocidad del desplazamiento de una persona en la playa es cuatro veces más grande que la velocidad de nadar.

Determina la ubicación del punto S en la orilla para que el camino de rescate RS u SRsea el óptimo.