ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5: DERIVADAS COMO FUNCIONES QUE DESCRIBEN LAS TENDENCIAS DE UN CAMBIO

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

PREGUNTAS ESENCIALES

a.- ¿Qué avances científicos fueron posibles al medir la rapidez instantánea de un cambio?

b.- ¿Qué información agrega la inflexión de un cambio al estudiar un fenómeno?

a.- ¿Cómo modelar con precisión el comportamiento de indicadores económicos?

PROPÓSITO

En la actividad individual se espera que los alumnos ubiquen en el gráfico los puntos máximos, mínimos y de inflexión y los verifiquen algebraicamente. En la siguiente parte de la misma actividad los alumnos deben hacer un resumen de las condiciones que cumplen las primeras tres derivadas en los puntos extremos y de inflexión, incluyendo el cambio del signo de $f´$ y de $f´´$, si la condición$f'(x_0)$≠ 0 o bien f´´´(x_0)≠ 0 no se cumplen.

Para la primera actividad colaborativa se espera que los alumnos elaboren un gráfico con herramientas digitales que representa la “Ley de A.R.J. Turgot” (1727 – 1781) economista y político francés. En la segunda actividad colaborativa se espera que los alumnos elaboren la función de las ganancias de una minería a partir de la función de los costos y de los ingresos y realicen una investigación completa, determinado máximas, mínimas e inflexión de las ganancias. Además, se espera que utilicen herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra para la elaboración de los gráficos incluyendo el cambio de parámetros económicos.

DURACIÓN	CONEXIÓN
Actividad individual:2 horas pedagógicas Actividad colaborativa: 2 horas pedagógicas	Con Funciones y Álgebra de 7° básico y 2° medio. Con Historia y Economía.

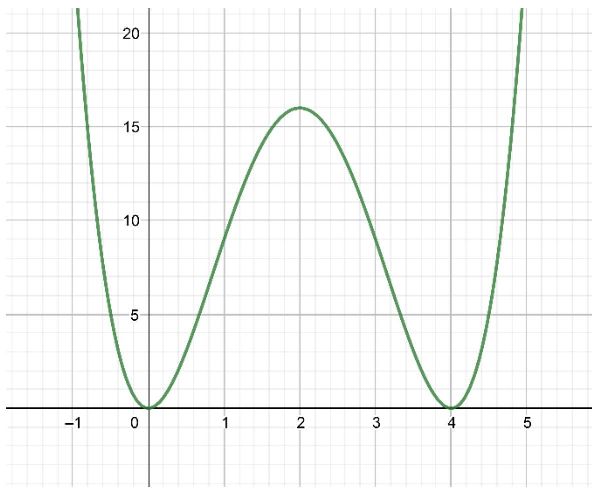
CONTEXTO

En la actividad individual el contexto es netamente matemático. En la primera actividad colaborativa se verifica que hay modelos matemáticos que describen la ley de Turgot. En la segunda actividad se investigan las ganancias de una minería a partir de las funciones de los costos y de los ingresos.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A. ACTIVIDAD INDIVIDUAL: IDENTIFICAR GRÁFICAMENTE PUNTOS MÍNIMOS, MÁXIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN, LUEGO VERIFICAR ALGEBRAICAMENTE.

1. En la imagen de abajo se representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$. Mirando el siguiente gráfico, responde:



   a. ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje x? ¿Qué propiedad adicional tienen estos puntos?
   b. ¿En qué lugares x_1, x_2, y x_3 hay puntos extremos? ¿De qué tipo son?
   c. ¿En qué lugares x_4 y x_5 hay puntos de inflexión?
   d. Determina algebraicamente la primera, segunda y tercera derivada de f.
   e. Verifica algebraicamente la existencia y las coordenadas de los ceros, de los puntos máximos, mínimos y de inflexión.
   f. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, representa los resultados de la actividad anterior mediante los gráficos de f´, $f´´$ y $f´´´$ en el mismo sistema de coordenadas

Hay que dejar a los alumnos la oportunidad de encontrar la factorización como método de resolver las ecuaciones de grado mayor de dos.

Si los criterios $f´(x_i) = 0$ no se cumplen, hay que ver, si hay cambio de signo de f´ en x_i. Lo mismo hay que considerar si el criterio $f´´(x_i) = 0$ no se cumple. En este caso se debe ver el cambio del signo de f´´ en x_i

g. Describe el comportamiento de f´, $f´´$ y $f´´´$ en los puntos máximos, mínimos y de inflexión. Completa la tabla considerando además los cambios de $f´(x_i)$ y de $f´´(x_i)$ en x_i . Anota también el cambio de curvatura en los puntos de inflexión.

$\boldsymbol{f(x_i)}$	**Punto máximo**	**Punto mínimo**	**Punto de inflexión**
$f´(x_i)$	0 y cambio: (+) -> (-)		---
$f´´(x_i)$			
$f´´´(x_i)$			

h. Determina algebraicamente la ecuación de la tangente en los puntos de inflexión.

i. Aprovechando la simetría del gráfico de f, determina el punto de intersección entre las tangentes de los puntos de intersección.

j. Se considera una colección de funciones g_a con $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. ¿Para qué valor de a la función g_a coincide con la función f?

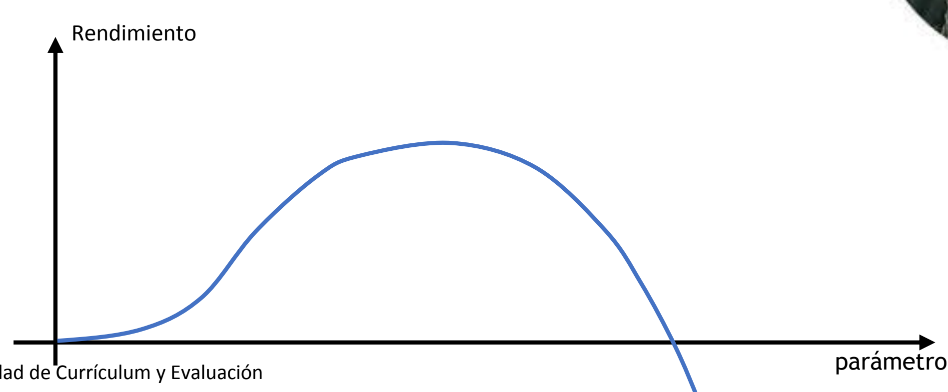
k. Determina el valor de a de tal manera, que en $x_0 = 0$ el gráfico de g_a tenga un punto de inflexión.

l. Representan el resultado de la actividad k elaborando el gráfico de g_a mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

> Para evitar la derivación de un producto se recomienda transformar la ecuación de g_a a una suma.

B. ACTIVIDAD COLABORATIVA: COMPRENDER LA LEY DE TURGOT, ARGUMENTAR SOBRE INGRESOS, COSTOS Y GANANCIAS.

1. El economista y político francés A.R.J. Turgot (1727 – 1781) encontró una ley que dice: Si aumenta y sigue aumentando un parámetro en la producción, mientras los demás parámetros queden invariantes, la producción inicialmente sube en su rendimiento, después disminuye su rendimiento y finalmente llega a resultados negativos. Un comportamiento similar se muestra en la imagen de abajo.



Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, utilizando deslizadores, diseñen gráficos de polinomios de tercer grado para mostrar que pueden modelar un comportamiento similar a la "Ley de Turgot".

2. Una minería está explotando un mineral. Los costos para la extracción se pueden modelar con una función *C* con $C(x) = 0{,}2x^3 - 4x^2 + 22x + 6$ en la cual x es la cantidad en toneladas del mineral diariamente extraído y *C* son los gastos en la unidad de 1 millón de pesos. Los ingresos *I* de la venta del mineral, también en la unidad de 1 millón de pesos, por tonelada, siguen la función lineal $I(x) = 10x$.

   a. Elaboren la ecuación de la función *G*, que representa las ganancias.
   b. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, confeccionen el gráfico de la función de las ganancias *G* en el intervalo de toneladas de [0, 18] y determinen aproximadamente en el gráfico la cantidad extraída para la cual se genera un mínimo y un máximo de las ganancias *G*.
   c. Verifiquen algebraicamente con la noción de derivadas las cantidades x_1 y x_2 para las cuales se genera un mínimo y un máximo de las ganancias.
   d. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, confeccionen el gráfico de la derivada de *G´* de G y verifican la coincidencia entre las actividades c y d.
   e. Por una sobre oferta y debido a otros indicadores económicos en el mercado internacional, los ingresos por tonelada bajan a 3 millones de pesos. Determinen gráficamente, utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, el intervalo de extracción en el cual se generan ganancias.

ORIENTACIONES PARA LA ACTIVIDAD DE AULA

1. Al inicio los alumnos identifican visualmente los ceros, puntos extremos y de inflexión.

2. Para la verificación algebraica es importante que los alumnos resuelven ecuaciones hasta el cuarto grado, aplicando la factorización de una suma con potencias para obtener un producto de dos expresiones algebraicas potenciales con el exponente 2 como el de mayor grado. Así se reducen las ecuaciones a ecuaciones cuadráticas.

3. Para disponer de un criterio, si las condiciones de $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x_0}) \neq 0$ ó $\boldsymbol{f'''}(\boldsymbol{x_0}) \neq 0$ no se cumplen los alumnos deben agregar los criterios del cambio de los signos de *f´* o de *f´´*.

4. La actividad k requiere las informaciones que el punto considerado pertenece a la curva y a la vez es punto de inflexión.

5. En la primera actividad colaborativa se muestra la ventaja que tiene GeoGebra para la elaboración de gráficos con parámetros que están variando.

6. Es importante que los alumnos mismos encuentren la ecuación de la función de las ganancias a partir de los costos y de los ingresos.

7. Antes de determinar algebraicamente mediante las derivadas de G' y G'', es importante que los alumnos ubiquen en el gráfico de G los puntos extremos y de inflexión.

8. Para el cierre de las actividades, pregúnteles ¿qué les pareció la actividad?, ¿qué les fue más difícil?, ¿cómo resolvieron las actividades?, ¿les fueron útiles las sugerencias dadas por el docente?, ¿pueden transferir lo aprendido a problemas cotidianos?

9. Apoye a los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades, observe su trabajo e interacción. No entregue las respuestas, haga preguntas para orientar la búsqueda de las soluciones.

10. Tras plantear un problema, deles, en primer lugar, un lapso para entenderlo. Luego, permítales que hagan ensayo y error como estrategia: que experimenten, que conjeturen, que pongan a prueba sus estrategias. Ello les ayudará a entender, preguntarse, cuestionarse si algo no resulta.

11. La actividad colaborativa es una muy buena oportunidad para que los estudiantes expresen su propia imaginación y creatividad, que ejerciten sus habilidades, que busquen información, arriesguen estrategias, que desarrollen su pensamiento matemático.

12. Observe a los jóvenes trabajando. Acérquese si hay preguntas, o si observa a alguno detenido, especialmente si observa signos de frustración o de no saber cómo actuar, y también a quienes que avanzan y muestran progreso. Ante un estancamiento, evite expresiones generales tales como “tú puedes hacerlo” (el estudiante cree o siente que no puede, y no está pudiendo), y prefiera hacer preguntas-sugerencias específicas, relacionadas con la dificultad que el estudiante enfrenta. Aliente y reconozca los logros –públicamente, más bien hacia el final–.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores

- http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm
- http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html
- https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia

- http://www.ecotec.edu.ec/content/uploads/2017/09/investigacion/libros/aplicaciones-derivada.pdf

Sitios web sugeridos para estudiantes

- http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm
- http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html
- https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia
- http://www.ecotec.edu.ec/content/uploads/2017/09/investigacion/libros/aplicaciones-derivada.pdf

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Luego de la actividad individual

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación

- Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento y puntos de inflexión.

Actitudes

- Manifestar autonomía y eficiencia para gestionar el propio aprendizaje, identificando fortalezas y aspectos mejorables.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Antes de continuar, se sugiere tomar unos minutos de la clase y hacer una puesta en común con los estudiantes de manera de verificar los aprendizajes logrados por ellos, o bien las dificultades que han tenido.
- Verificar que reconocen puntos máximos y de inflexión.
- Verificar que aplican las reglas de derivación.
- Verificar que resuelven ecuaciones cuadráticas o de mayor grado mediante una factorización.

Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Reforzar conceptos o procedimientos.** Cuando no se ha tenido el éxito esperado con la actividad propuesta, es necesario considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de refuerzo**, en las que se pueda volver a factorizar y operar con expresiones algebraicas, trabajo necesario para posteriormente calcular límites y derivadas de funciones polinomiales.

-**B. Continuar con la actividad tal como está diseñada.** Desarrollar la **actividad colaborativa** para profundizar en el OA propuesto a partir de lo trabajado individualmente.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE REFUERZO: FACTORIZAR, DETERMINAR DERIVADAS Y VERIFICAR ALGEBRAICAMENTE.

Se sugiere al docente proponer actividades como las siguientes:

1. Factorizar completamente expresiones polinomiales incluyendo los productos notables.
   a. $2x^4 - 50x^2$
   b. $16x^3 - 8x^2 + 12x$
   c. $3x^2 - 12x$+12
2. Determinar las primeras tres derivadas de *f* con $f(x) = x^3(2x^2 + 3x + 5)$

3. Verificar algebraicamente que la función g con $g(x) = x^5$ tiene en el origen $O(0,0)$ un punto de inflexión.

Luego de la actividad colaborativa

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación	Actitudes
- Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento y puntos de inflexión.	- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Antes de cerrar la actividad, se sugiere tomar unos minutos de la clase y hacer una puesta en común con los estudiantes de manera de verificar los aprendizajes logrados por ellos, o bien las dificultades que han tenido en el trabajo colaborativo.
- La evaluación formativa debe considerar la habilidad de representar en conjunto con la habilidad de utilizar adecuadamente herramientas digitales como se exige en la primera actividad colaborativa.
- Además, se debe considerar transferencia de resultados matemáticos al contexto de Economía.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Mayor desafío.** Cuando las actividades individual y colaborativa han sido desarrollas con éxito y fluidez, sería pertinente plantear un desafío que amplíe ligeramente los límites del OA. Para ello se pueden considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de desafío** que se muestra a continuación.

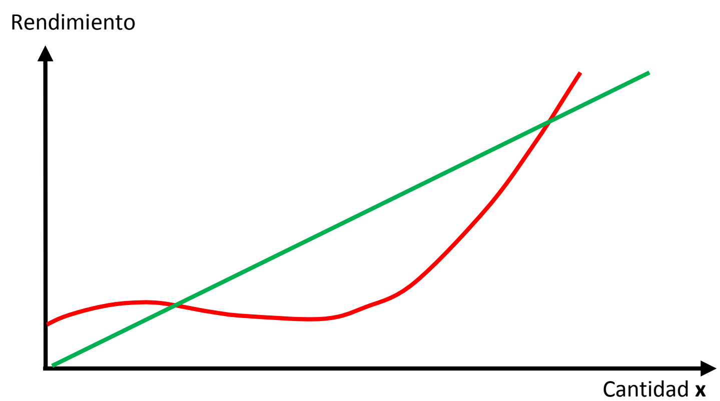
- Preguntas esenciales

Al final de cada una de las actividades invite a los estudiantes a responder una o más de las preguntas esenciales.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD O PREGUNTA PARA CONSTATAR EL LOGRO DE HABILIDADES: IDENTIFICAR GRÁFICAMENTE COSTOS, INGRESOS Y GANANCIAS.

La actividad colaborativa tiene como principal propósito de determinar puntos extremos y de inflexión en gráficos e interpretarlos en el contexto dado. En el gráfico de abajo la variable y representa los costos y los ingresos de una producción. Contestar las preguntas y razonarlas.

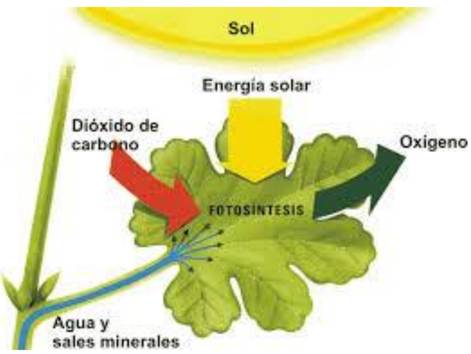
- ¿Cuál de los gráficos representa los costos y cuál los ingresos?
- ¿Hay costos fijos?
- ¿Dónde hay máximos, mínimos e inflexión? Marcar los puntos.
- ¿En qué intervalo hay ganancias en la producción? Marcar el intervalo en el eje X.

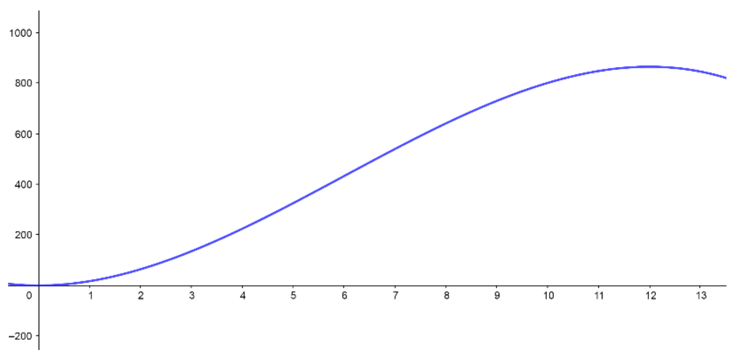


EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DESAFÍO: INTERPRETAR GRÁFICAMENTE LA FOTOSÍNTESIS.

Para profundizar en el aprendizaje se sugiere al docente proponer actividades tal como:

1. La fotosíntesis se genera en las hojas plantas cuyo producto es oxígeno, uno de los elementos fundamentales para la vida. En la imagen de abajo se muestra el gráfico de una función que modela aproximadamente la producción diaria de oxígeno de un árbol.
   La función representa un polinomio de tercer f grado con la ecuación $f(t) = at^3 + bt^2$. La función f representa el volumen total del oxígeno producido en litros hasta la hora indicada.
   La variable t representa el tiempo en horas que han pasado desde la salida del sol.





a. Determinan los parámetros a y b con la siguiente información.

- En el instante $t = 6$ horas después de la salida del sol se han acumulado 540 litros de oxígeno producido.
- En el mismo instante se empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido.

b. Con los resultados de la actividad anterior y utilizando herramientas tecnológicas digitales elaboran el gráfico de la función f.

c. Determinan algebraicamente el punto máximo de la función f.