ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 6: OPERACIONES CON FUNCIONES

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

PREGUNTAS ESENCIALES

a.- ¿Qué tipos de problemas se pueden resolver con funciones?

a.- ¿Cómo las operaciones con funciones permiten resolver problemas relacionados con índices económicos?

PROPÓSITO

Con el desarrollo de estas actividades, se espera que los estudiantes sean capaces de realizar operaciones entre funciones de acuerdo con los contextos estudiados. Dichas operaciones serán consideradas como el álgebra de las funciones, y serán relacionadas y comparadas con las operaciones aritméticas entre números. Al mismo tiempo, se comparará con la composición entre funciones, notando la diferencia entre ambas, desde los resultados hasta la interpretación en el contexto. En todo momento se hará uso de la representación simbólica, sin embargo, se agrega de forma introductoria el análisis gráfico, para darle al docente la oportunidad de continuar con ello en las clases siguientes.

DURACIÓN	CONEXIÓN
Actividad individual: 1 hora pedagógica Actividad colaborativa: 2 horas pedagógicas	Economía: Modelar el fenómeno económico de “oferta y demanda”, “precio y ganancia”, etc. mediante la composición de funciones y la operación entre funciones.

CONTEXTO

La economía es una ciencia que busca responder preguntas tales como: ¿qué bienes producir?, ¿cuánto producir de cada bien?, ¿cómo distribuir los bienes?, entre otras. En definitiva, se preocupa de cómo los individuos emplean sus escasos recursos para satisfacer sus necesidades que son múltiples y jerarquizarles. Dentro de estas problemáticas se han creado diversos modelos que permiten, por ejemplo, a un pequeño empresario, contar con una herramienta confiable que lo ayude a competir en el mercado y que le permita conocer sus gastos, precios de venta, ganancias, por nombrar algunos aportes.

En la mueblería “El canelo”, ubicada en la ciudad de Valdivia, Alex, su dueño, tiene una serie de reglas para determinar sus costos o lo que debe cobrar si le piden hacer una producción elevada de muebles. Además, sabe cómo se comporta el mercado de los muebles, teniendo claro cómo impacta a la venta, el hecho de subir o bajar sus precios.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A. ACTIVIDAD INDIVIDUAL: ARGUMENTAR SOBRE OFERTA Y DEMANDA USANDO FUNCIONES

1. De acuerdo con su experiencia y la información que ha recabado a lo largo de los años, Alex ha determinado que las funciones de oferta y demanda de las cómodas que él produce y vende son las siguientes:

$$O(p) = 60\,000p - 230\,000$$
$$D(p) = -3\,000p + 220\,000$$

Las funciones muestran la dependencia de la cantidad de artículos ofertados y los consumidores que están dispuestos a comprar, en función del precio.

   a. ¿Qué crees que podría representar p en ambas funciones?
   b. La función oferta y la función demanda, ¿qué información entregan? ¿a qué variable representan ambas funciones?

2. Grafica ambas funciones en un plano cartesiano. Puedes usar GeoGebra, graduando adecuadamente los ejes.

Fig. 1: Plano cartesiano

3. Señala el dominio y recorrido de cada función, considerando el contexto del problema.

4. ¿Cómo se interpreta el punto de intersección de las rectas? Argumenta.

5. Encuentra de forma algebraica el punto de intersección de las rectas.

Se define:
$f: A \to C$ y $g: B \to D$
$$(f+g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$\text{Dom }(f+g) = A \cap B$$

a. ¿Qué relación se da entre ambas funciones para encontrar el punto de intersección de las rectas?
b. Otra forma de resolver lo anterior es restando ambas funciones. Opéralas de esta forma y compara con tu respuesta anterior.

B. ACTIVIDAD COLABORATIVA: MODELAR EL PRECIO DE BIENES USANDO FUNCIONES

1. Para conocer los costos por la producción de las cómodas, Alex estima algunos gastos y concluye que por una cómoda el costo es $100 000, por dos cómodas puede hacer una reducción del gasto, costando $198 000. Tres cómodas tienen un costo de $294 000, y así sucesivamente.
   a. Completen la tabla.

Tabla 1: Tabla de valores. Relación entre costos y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Costo $C(x)$	100000	198000	294000						

2. En Excel, encuentren la curva que mejor aproxima la función entre x y $C(x)$.
   a. Ingresen los datos anteriores creando una tabla de dos columnas. La primera de ellas será la cantidad de cómodas y la segunda los costos.
   b. Luego, inserten un "Gráfico de dispersión solo con marcadores" y describan de manera general la forma de esta gráfica.
   c. Sobre los puntos del gráfico (con el botón derecho del mouse) hagan clic en "Agregar línea de tendencia".
   d. En la ventana emergente elijan la opción "Polinómica".
   e. Casi al pie de la ventana aparece la opción "Presentar ecuación en el gráfico", márquenla y cierren la ventana ¿qué función apareció?

3. Interpreten esta función en el contexto del costo de producción de x unidades.
   a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   b. ¿A partir de qué cantidad de unidades de cómodas, según el modelo, el costo deja de aumentar? ¿Qué sentido tiene?
   c. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

Este problema será tratado solo como discusión. No es el foco de la actividad resolverlo.

4. Respecto del precio que debe cobrar, Alex ha considerado necesario realizar un descuento a medida que las unidades solicitadas van en aumento. Descuenta un 1% por cómoda, desde la compra de dos cómodas en adelante. Por comprar solo una cómoda no se hace descuento.
   a. Completen la tabla.

Tabla 2: Tabla de valores. Relación entre precio y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Precio $P(x)$	200000	396000	588000			1800000			

5. En Excel, encuentren la curva que mejor aproxima la función entre $P(x)$.

6. Interpreten esta función en el contexto del precio de venta de x unidades.
   a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   b. ¿A partir de qué cantidad de unidades de cómodas, según el modelo, el precio de venta deja de aumentar? ¿Qué sentido tiene?
   c. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

7. ¿Cómo pueden determinar los ingresos de Alex solo por estas cómodas, según la cantidad de unidades producidas y vendidas?
   a. ¿Qué operación matemática pueden realizar entre $P(x)$ y x para obtener los ingresos?
   b. Muestren la operación y el modelo $I(x)$ obtenido en a.
   c. En GeoGebra, grafiquen la función $I(x)$
   d. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   e. Interpreten la función de acuerdo con el contexto.

Se define:
$f: A \to C$ y $g: B \to D$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\mathrm{Dom}(f \cdot g) = A \cap B$

8. ¿Cómo pueden determinar las ganancias de Alex solo por estas cómodas, según la cantidad de unidades producidas y vendidas?
   a. ¿Qué operación matemática pueden realizar entre $I(x)$ y $C(x)$ para obtener las ganancias?
   b. Muestren la operación y el modelo obtenido $C(x)$
   c. En GeoGebra, grafiquen la función $C(x)$
   d. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   e. Interpreten la función de acuerdo con el contexto.

Se define:
$f: A \to C$ y $g: B \to D$
$(f - g)(x)$
$= f(x) - g(x)$
$\mathrm{Dom}(f - g) = A \cap B$

9. ¿En qué valor de x Alex no gana ni pierde dinero entre la producción y la venta de cómodas?

10. ¿En qué valores de x Álex gana lo máximo posible?

11. En algunas ocasiones es posible confundirse con el símbolo de producto y el de composición, como en el caso de $(f \cdot g)(x)$ o $(f \circ g)(x)$.
    a. $I(x)$ se obtuvo como el producto de dos funciones. Prueben componiendo las mismas funciones y verifiquen si la resultante es igual a $I(x)$ o es distinta.
    b. Interpreten ambas composiciones de funciones y compárenlas con el sentido de $I(x)$.

ORIENTACIONES PARA LA ACTIVIDAD DE AULA

1. La economía es un término poco cercano a la comunidad en general. Sin embargo, su aporte es fundamental en muchos ámbitos. El foco central de estas actividades es usar un contexto económico para ver cómo la matemática modela estos fenómenos cercanos. Se usa de base el ejemplo de una mueblería. Si bien hay supuestos que se han hecho, se ha tratado de hacer que los precios y costos usados se aproximen lo mejor posible a la realidad.
2. En la actividad individual se presentan las funciones de oferta y demanda, en ellas la variable independiente es el precio p y la variable dependiente, que no es obvia de visualizar, es la cantidad de artículos, ya sean ofertados o demandados.
3. Se pide en esta etapa graficar ambas funciones con el fin de identificar de mejor manera el dominio y recorrido de ellas, desde el contexto, pues se considera que solo desde su forma gráfica no es tan evidente.
4. Al mismo tiempo, la gráfica de se usa para identificar de forma rápida el punto de equilibrio, dado por la intersección de ambas rectas. El punto de equilibrio se debe interpretar como el punto en que se oferta tanto como se demanda, o en otras palabras, todo lo que hay para vender se vende. Esta actividad se puede complementar con el análisis del exceso de demanda, de oferta, entre otros.
5. Volviendo al punto de equilibrio, de forma algebraica este se obtiene como $O(p) = D(p)$, o lo que es igual a $O(p) - D(p) = 0$. Esta es la oportunidad en la que se puede definir la operación de sustracción entre funciones.
6. En la actividad colaborativa, los estudiantes deben determinar, a partir de ciertos valores, la función que modela el costo de producción de x unidades y el precio cobrado por ellas, al venderlas. El docente puede iniciar la actividad entregando de inmediato las funciones, pero con ello perdería la oportunidad de realizar un modelamiento, algo que nunca dejará de ser foco en las actividades de este Objetivo de Aprendizaje.
7. De las dos funciones encontradas, $C(x)$ y $P(x)$, se pueden obtener las funciones para el ingreso y la ganancia, $I(x)$ y $G(x)$, realizando ciertas operaciones. En ese momento se pueden definir la operación de multiplicación y la definición de sustracción se puede volver a estudiar.
8. En las actividades, al operar las funciones se hace desde la forma algebraica, sin embargo, se piden graficar usando GeoGebra, para apoyar la interpretación en el contexto y para determinar el dominio y recorrido.
9. En las cuatro funciones usadas en esta parte colaborativa se pide dominio y recorrido, en conjunto con la operación e interpretación de los resultados. Esto da lugar a que el profesor releve la restricción del dominio que indica que se deben intersectar los dominios de las funciones a operar para obtener el dominio de la función resultante. Esto es: si $f: A \to C$ y $g: B \to D$ entonces, al operar f con g la función resultante tendrá dominio $A \cap B$
10. Para finalizar, se compara la multiplicación de funciones con la composición de ellas, pues son estos dos casos los que comúnmente confunden a algunos estudiantes. Los símbolos $\cdot$ y $\circ$ son similares.

Además de notar las diferencias desde la forma algebraica, se pide interpretar los resultados de la compuesta y compararlos con los resultados de la multiplicación, evidenciando aún más la diferencia que existe entre ambas acciones, multiplicar o componer funciones.

11. Es de gran apoyo el uso de las herramientas tecnológicas en estas actividades. GeoGebra aporta con la gráfica de varias funciones en un mismo plano cartesiano, y Excel con la posibilidad de determinar la aproximación de una curva usando valores en una tabla de datos, además de aproximar la forma algebraica de la curva obtenida.
12. En las actividades se estudia la resta y la multiplicación de funciones. La suma se puede deducir de la resta sin problemas. El caso de la división de funciones se deja como desafío, ya que, en gran parte de los casos, lo que se obtiene es una función racional, lo que requiere un tratamiento especial.
13. Para el cierre de las actividades, pregúnteles ¿qué les pareció la actividad?, ¿qué les fue más difícil?, ¿cómo resolvieron las actividades?, ¿les fueron útiles las sugerencias dadas por el docente?, ¿pueden transferir lo aprendido a problemas cotidianos?
14. Apoye a los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades, observe su trabajo e interacción. No entregue las respuestas, haga preguntas para orientar la búsqueda de las soluciones.
15. La actividad colaborativa es una muy buena oportunidad para que los estudiantes expresen su propia imaginación y creatividad, que ejerciten sus habilidades, que busquen información, arriesguen estrategias, que desarrollen su pensamiento matemático.
16. Observe a los jóvenes trabajando. Acérquese si hay preguntas, o si observa a alguno detenido, especialmente si observa signos de frustración o de no saber cómo actuar, y también a quienes que avanzan y muestran progreso. Ante un estancamiento, evite expresiones generales tales como “tú puedes hacerlo” (el estudiante cree o siente que no puede, y no está pudiendo), y prefiera hacer preguntas-sugerencias específicas, relacionadas con la dificultad que el estudiante enfrenta. Aliente y reconozca los logros –públicamente, más bien hacia el final–.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores

- Explicaciones breves sobre economía básica
  https://sites.google.com/site/gurpo4matematica/matematica-para-la-economia
  http://www.auladeeconomia.com/micro-ejerciciosresueltos4.htm
- GeoGebra online
  https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc
- Definición sencilla de las operaciones entre funciones. No agregan análisis de dominio
  https://www.sectormatematica.cl/contenidos/funoper.htm

Sitios web sugeridos para estudiantes

- GeoGebra online
  https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc
- Definición sencilla de las operaciones entre funciones. No agregan análisis de dominio
  https://www.sectormatematica.cl/contenidos/funoper.htm

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Luego de la actividad individual

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación	Actitudes
- Resuelven problemas de operaciones con funciones y composición de funciones.	- Manifestar flexibilidad, creatividad y proactividad en la búsqueda de soluciones innovadoras a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, y propios de otras asignaturas.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Dado que la actividad está basada en un OA de funciones, se considera clave comenzar con una actividad en contexto que requiera operar dos funciones. Ellas se igualan entre sí, lo que es equivalente a restarlas y que su resultado se iguale a cero.
- Este trabajo se realiza tanto de forma algebraica como gráfica.
- Es clave señalar que las preguntas 1, 3 y 4 de la actividad individual apuntan a aspectos esenciales del modelamiento matemático de fenómenos. Por lo tanto, es necesario que todos los estudiantes las aborden.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Reforzar conceptos o procedimientos.** Cuando no se ha tenido el éxito esperado con la actividad propuesta, es necesario considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de refuerzo**, en las que se pueda volver a revisar los aspectos claves del sentido de la composición de funciones y las restriccines a las que debe atender.

-**B. Continuar con la actividad tal como está diseñada.** Se sugiere desarrollar la **actividad colaborativa** para profundizar en el OA propuesto a partir de lo trabajado individualmente.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE REFUERZO: CALCULAR EQUILIBRIO DE OFERTA Y DEMANDA USANDO FUNCIONES

Se sugiere al docente proponer actividades como las siguientes:

1. Practicar con un problema similar al propuesto, para poner en práctica lo aprendido y resolver las dudas que quedaron de la aplicación en el contexto económico.

   a. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

   $$Q(x) = -50 + 1{,}5p$$
   $$D(x) = 600 - p$$

      i) Calcula el precio y la cantidad para tener equilibrio en el mercado.
      ii) ¿A qué precio se producirá una escasez de 100 unidades?

   b. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:

   $$Q(x) = -200 + \frac{1}{4}p^2$$
   $$D(x) = 520 - \frac{1}{5}p^2$$

      i) ¿Cuál es la cantidad para el equilibrio?
      ii) Si el fabricante desea poner un precio de \$50 al producto ¿qué cantidad de producto demandará el mercado?

2. Operar con funciones de forma algebraica, apoyando el trabajo en GeoGebra, específicamente en la Vista algebraica.

   Encuentra $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$ y los dominios respectivos:

      i) $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x - 3$
      ii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
      iii) $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

Luego de la actividad colaborativa

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación	Actitudes
- Resuelven problemas de composición de funciones utilizando diagramas cartesianos, diagramas sintácticos o metáforas. - Resuelven problemas de operaciones con funciones y composición de funciones.	- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Esta actividad está basada en un OA de funciones, por lo que será clave que el docente identifique si los estudiantes logran operar con funciones de forma algébrica sin mayores complicaciones, pero al mismo tiempo que ponen énfasis en las restricciones propias del dominio y recorrido de la resultante.
- El docente también se debe percatar si los estudiantes distinguen claramente la composición de funciones con la multiplicación (o posiblemente la adición) de funciones. Esto se debe verificar tanto en la operación algebraica como desde la interpretación de las resultantes obtenidas en los contextos usados.
- El uso de GeoGebra se propone cada vez que sea necesario graficar dos funciones en un mismo plano cartesiano. Se agrega la propuesta de usar Excel cuando sea necesario determinar una función a partir de puntos dados en una tabla.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

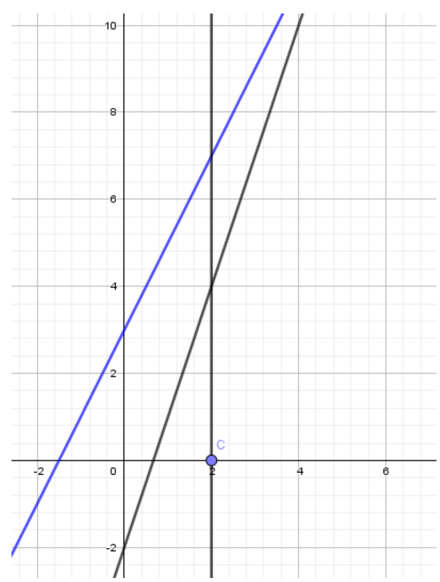
A. Mayor desafío. Cuando las actividades individual y colaborativa han sido desarrollas con éxito y fluidez, sería pertinente plantear un desafío que amplíe ligeramente los límites del OA. Para ello se pueden considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de desafío** que se muestra a continuación.

- Preguntas esenciales

Al final de cada una de las actividades invite a los estudiantes a responder una o más de las preguntas esenciales.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD O PREGUNTA PARA CONSTATAR EL LOGRO DE HABILIDADES: REPRESENTAR FUNCIONES PARA ESTUDIAR LA SUMA DE FUNCIONES Y SUS PROPIEDADES

Tanto la actividad individual como la actividad colaborativa tienen como principal propósito que los estudiantes sean capaces de operar algebraicamente con al menos dos funciones y que puedan comprender cuál es el sentido de la función resultante. Con el fin de potenciar la habilidad de representación y argumentación, se sugiere complementar el trabajo ya realizado con el análisis gráfico de la operación con funciones, en particular, de la suma de dos funciones. También es recomendable que el docente profundice en las propiedades que se dan en la operatoria, fortaleciendo la habilidad argumentativa en los estudiantes.



- Grafica las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4x + 1$
  a. Marca un punto C en el eje X.
  b. Traza una recta vertical que pase por C y que corte a la gráfica de $f(x)$ y a la gráfica de $g(x)$.

c. Sobre $g(x)$ copia el segmento formado entre C y la gráfica de $f(x)$, como se muestra en la figura.

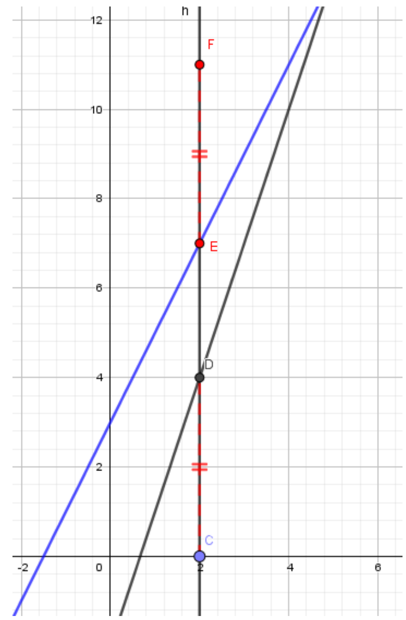
d. Repite lo anterior, ubicando otros puntos sobre el eje X.

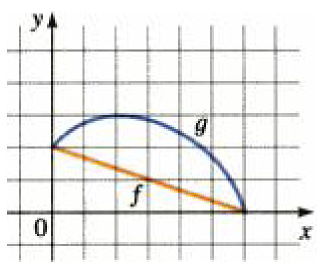
e. Completa con la forma gráfica que une los puntos obtenidos.

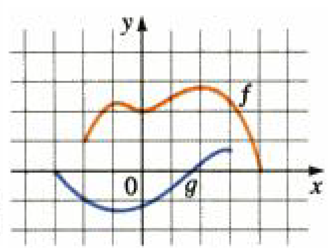
f. Por otro lado, suma algebraicamente las funciones f y g, es decir, determina $(f+g)(x)$

g. Compara la función resultante con la forma gráfica obtenida.

h. Prueba con otros ejemplos de funciones y generaliza para la adición de funciones.







i. Prueba con otras operaciones. ¿Son todas igualmente fáciles de obtener gráficamente?

- Argumenta si se cumplen o no las siguientes propiedades y en qué operaciones:

i. Propiedad asociativa

ii. Propiedad conmutativa

iii. Elemento neutro

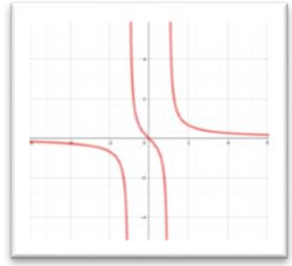
iv. Distributividad del producto sobre la adición

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DESAFÍO: REPRESENTAR Y ARGUMENTAR ACERCA DE FUNCIONES RACIONALES

Para profundizar en el aprendizaje se sugiere al docente proponer actividades tal como:

1. En la división de funciones, estudiar el caso de las funciones racionales y conjeturar cómo se comportaría su dominio, recorrido y su gráfica.
   Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones.
   Se define una función $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, f es una función racional.
   a. ¿Cómo se define el dominio de f? ¿Es necesariamente igual al dominio de Q?
   b. ¿En qué puntos del dominio, f podría no estar definida? ¿Cómo se visualizaría esto en la gráfica de f?
   c. ¿Podría ocurrir que f no esté definida para uno o más valores del recorrido? ¿De qué depende?

2. Bosqueja un caso particular de función racional.
   a. Considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.
   b. ¿En qué valor no está definida f? Argumenta por qué.
   c. Indica el dominio de f.
   d. Las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de f. Explica por qué.
   e. Cuando x toma valores próximos a $x = 1$, la función toma valores muy grandes y valores muy pequeños. Piensa en la gráfica acercándose por la derecha y por la izquierda a f. Da algunos valores particulares, por ejemplo, evalúa f en 0,99 (por la izquierda) y 1,01 (por la derecha).
   f. Observa que los grados del numerador y el denominador no son iguales. Hay una asíntota en $y = 0$. Haz la misma prueba anterior, probando con valores en $f(x)$.
   g. Entre las asíntotas, prueba con algunos valores para $f(x)$ hasta que deduzcas la forma general de la gráfica.
   h. Luego corrobora tu bosquejo en GeoGebra.



Si x_0 es una raíz de $Q(x)$, y $P(x_0) \neq 0$, la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical.

Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ tienen el mismo grado, $a_n \neq 0, b_n \neq 0$, la recta $y = \frac{a_n}{b_n}$ es la asíntota horizontal.
Si el grado de $Q(x)$ es mayor que el de $P(x)$, la asíntota horizontal es $y = 0$