Actividad 1: ¿Cómo se distribuyen el éxito y el fracaso?

PROPÓSITO

Los estudiantes establecen un modelo probabilístico binomial en dos situaciones y ven cómo, a partir de casos particulares y mediante la experimentación, se puede avanzar hacia establecer un modelo que permite hacer predicciones y tomar decisiones futuras con fundamentos estadísticos. Para esto, deben organizar información y ser proactivos para buscar soluciones; asimismo, tienen que recordar y profundizar temas como el aparato de Galton, que trabajaron en 1° medio.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 9 horas pedagógicas

DESARROLLO

TABLA DE GALTON

1. Construye un aparato de Galton o utiliza una versión digital para realizar el experimento aleatorio.
    a. ¿Cuál es el camino recorrido por uno de los objetos?
    b. ¿Cómo será la distribución de los datos en experimentos de este tipo?
    c. ¿Cómo se relacionan los caminos con las respuestas de un experimento dicotómico?
    d. ¿Qué relación tienen las divisiones del aparato y la cantidad de fichas que se deja caer con el experimento?

2. Prueba con otros aparatos de Galton: se puede utilizar alfileres, un tablero en plumavit y cajas de fósforos, o un geoplano o un recurso digital, como muestra la figura.

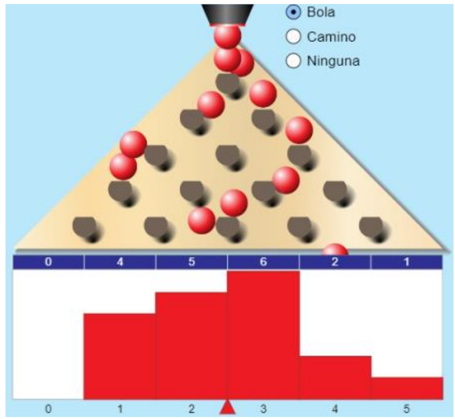
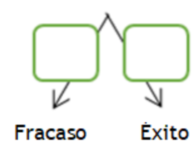


Fig. 1: Aparato de Galton en recurso digital.
Extraído de
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/math

3. Configura el aparato de Galton con probabilidad 0,5 y 5 filas, realiza varias pruebas, observa dónde caen las fichas y mira la distribución en las diferentes casillas.
   a. ¿Todas las casillas se llenan con la misma cantidad de fichas?
   b. ¿Cómo se distribuyen las fichas en las casillas?
4. Piensa en una ficha. Si toma el camino a tu izquierda, se considerará un fracaso y si toma el camino a tu derecha, se considerará un éxito.



   a. En un desvío cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de obtener un éxito?
   b. ¿Y cuál es la probabilidad de obtener un fracaso?
5. Si una ficha sigue siempre el camino de tu izquierda, en las 5 filas:
   a. ¿Cuántos fracasos ocurren?
   b. ¿Cuántos éxitos ocurren?
6. Por el contrario, si la ficha sigue solamente el camino de tu derecha:
   a. ¿Cuántos éxitos ocurren?
   b. ¿Cuántos fracasos ocurren?
7. Determina la cantidad de éxitos y fracasos cuando la ficha cae en algunas de las casillas intermedias.

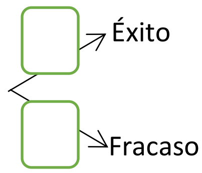
8. Si numeras las casillas donde caen las fichas desde $X = 0, 1, 2, 3, 4\ y\ 5$, de izquierda a derecha, con 5 filas:
    a. ¿De cuántas maneras se puede llegar a $X = 0$?
    b. ¿De cuántas maneras se puede llegar a $X = 1$?
    c. Responde la pregunta anterior hasta $X = 5$. Señala cómo la combinatoria puede aportar a realizar los conteos pedidos. Relaciona estas respuestas con las obtenidas anteriormente.
    d. ¿Cuántos caminos posibles se puede observar? Considera todos los caminos posibles.
9. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha siga un camino específico? Argumenta si los sucesos asociados a seguir un camino son o no equiprobables.
10. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a una casilla en específico?
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 0, $P(X = 0)$?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 1, $P(X = 1)$?
    c. Repite la pregunta anterior hasta llegar a la casilla 5, $P(X = 5)$.
    d. Si estás usando el recurso digital, simula el lanzamiento de la ficha al menos 500 veces y compara la probabilidad experimental con la probabilidad teórica que obtuviste recién.
11. ¿Cuál es la distribución de las fichas en las distintas casillas? ¿Cómo es la distribución de probabilidad de las fichas en este experimento aleatorio?
12. Expresa de forma general la probabilidad de que una ficha llegue a una de las posibles casillas.
13. Inventa una situación en contexto que pueda ser simulada por este experimento binomial.

UNA PRUEBA DE SELECCIÓN

Muchas pruebas estandarizadas son de selección múltiple. Por ejemplo, en una prueba de 80 preguntas de 5 alternativas cada una, el azar puede estar presente si el estudiante no tiene certeza de cómo responder correctamente cada pregunta. En este caso, al estudiante le debería interesar la pregunta ¿Qué tan probable es que un estudiante respondiese cierta cantidad de preguntas al azar y tuviese varias correctas? Contesta las siguientes preguntas con un compañero y averigüen qué tan probable es que una persona que no estudió lo suficiente y recurriera mucho al azar, obtuviese un buen puntaje en esa prueba.

1. Supongan que responden una pregunta al azar.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar? es decir, ¿de qué sea éxito?
    b. Considerando que son 5 alternativas, ¿son todas igualmente probables?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de no acertar a la respuesta correcta? es decir, ¿de qué sea fracaso?

d. Completen el esquema, anotando los valores de las probabilidades correspondientes en los recuadros.



2. Consideren el caso de responder una pregunta al azar. Se tienen entonces los sucesos:

   A: Obtener 0 respuestas correctas (o un fracaso)

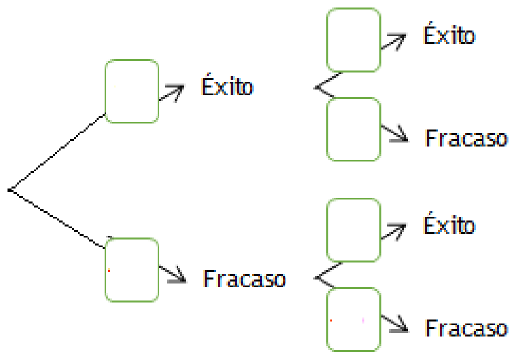
   B: Obtener 1 respuesta correcta (o un éxito)

   O bien: $A = \{0\}$; $B = \{1\}$

3. La variable aleatoria X representa el número de éxitos en el experimento. ¿Cuáles son las probabilidades de P(X = 0); P(X=1)?

4. Ahora consideren el caso de responder al azar dos preguntas. Conjeturen: ¿será igualmente probable obtener una respuesta correcta que en el caso anterior?

5. Completen el diagrama, luego definan los sucesos C, D y E y determinen qué probabilidades hay de que ocurran ninguno, uno o dos aciertos en la prueba, respectivamente, si se responde dos preguntas al azar:



$C = \{(\, , \,)\}$
$D = \{(\, , \,), (\, , \,)\}$
$E = \{(\, , \,)\}$

6. ¿Cuántas formas tienen de combinar los éxitos y los fracasos? Observen el diagrama y respondan:

   a. ¿De cuántas maneras se puede combinar dos fracasos o cero éxitos?
   b. ¿De cuántas maneras se puede combinar un éxito y un fracaso?
   c. ¿De cuántas maneras se puede combinar dos éxitos?

7. Usando las combinaciones anteriores y las probabilidades escritas como potencia, busquen un modo de expresar la probabilidad de responder k preguntas correctas $P(X = k)$, si se responde 2 preguntas al azar.

8. Para poner a prueba su modelo anterior, consideren el caso de responder al azar 3 preguntas.

    a. Háganlo paso a paso: diagrama de árbol, definiendo los sucesos con 0, 1, 2 y 3 aciertos, y determinando las probabilidades.

    b. Reemplacen datos en el modelo que determinaron y contrasten con los resultados anteriores.

    c. Si es necesario, ajusten su modelo. Compárenlo con los de sus compañeros.

9. Si es necesario, hagan todo de nuevo con el caso de responder al azar 4 preguntas. Comprueben la validez de su modelo, luego de hacerlo todo paso a paso.

10. ¿Qué aporta el modelo encontrado?

    a. ¿Cómo pueden usarlo para predecir qué ocurre al responder cada vez más preguntas al azar?

    b. ¿Da lo mismo responder al azar 30 preguntas y esperar tener 20 correctas, que responder 20 preguntas al azar y esperar tenerlas todas correctas?

11. Usen el modelo para estimar cuánto vale la pena responder al azar para confiar en tener buenos resultados.

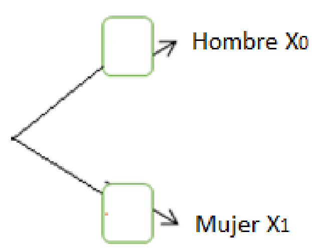
MUJER O VARÓN

Suponiendo que la probabilidad de que una pareja tenga un hijo varón sea la misma que tener una hija:

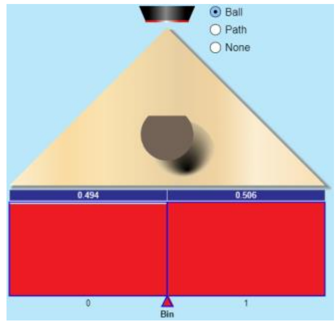
a. Simula en el aparato de Galton la situación de estar esperando un hijo y no conocer su sexo.

   Designa como A el suceso de tener un hijo hombre y B el de tener una mujer. Considera $A = \{0\}$; $B = \{1\}$

b. Completa el diagrama de árbol con las probabilidades frecuenciales, al repetir el experimento 500 veces.

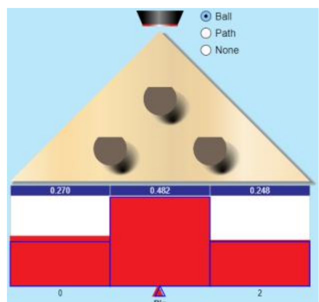


c. Marca la opción que muestra la distribución ideal y compárala con la anterior. Completa el diagrama de árbol con las probabilidades teóricas.



d. Calcula la probabilidad de que una familia con 6 hijos tenga 2 varones.

e. Ahora considera que la familia planifica tener dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean mujeres o que ambos sean hombres? ¿O que sea un hombre y una mujer (no importa el orden)?



f. Sigue la estrategia de completar el diagrama de árbol; luego simula el experimento 500 veces para contrastar la probabilidad frecuencial con la teórica.

g. Usa la expresión $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ para determinar la probabilidad de:

- tener una hija al tener 1 hijo $(k = 1; n = 1; p = 0{,}5)$
- de tener 1 hija al tener 2 hijos $(k = 1; n = 2; p = 0{,}5)$
- de tener 2 hijas al tener 2 hijos $(k = 2; n = 2; p = 0{,}5)$
- Compara los resultados anteriores con los de usar la fórmula

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^n$$

- Compara tus respuestas con tus compañeros y determinen qué parámetro marca la diferencia entre usar una fórmula completa o una reducción de ella.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La distribución de probabilidad binomial aporta con un nuevo modelo predictivo de probabilidad que permite estudiar problemas que el modelo de Laplace no puede modelar; por este motivo, es importante que los alumnos diferencien entre los sucesos elementales equiprobables y los que no lo son.
2. Se sugiere iniciar modelando un experimento aleatorio, dicotómico, con probabilidad 0,5. Esto permite comprender por qué, a medida que aumentan las repeticiones del experimento, no se puede usar el modelo de Laplace; por ejemplo: notan que cada casilla en la que pueden caer las fichas tendrá probabilidades distintas a medida que haya más filas. También es interesante que perciban la simetría que hay en las probabilidades de las casillas.
3. Discutan la cantidad de caminos posibles y las probabilidades, a partir de una situación de 5 filas y 5 caminos posibles, de un total de 32, que la ficha puede seguir para llegar a la casilla X_1. El 32 es sin restricciones de éxitos, considera cualquier camino posible; eso significa que tuvo solo un éxito en cada uno de esos 5 caminos y el resto fueron fracasos. Pero en cada desvío había dos opciones igualmente probables. La probabilidad de caer en la casilla X_1 es $\frac{5}{32}$; en cambio la probabilidad en cada desvío es $\frac{1}{2}$.
4. Se sugiere usar el diagrama de árbol para determinar las probabilidades y para que definan los sucesos de estudio. Utilícelo para analizar cómo el hecho de que los sucesos sean independientes permite calcular sumas y productos de forma simple, usando las ramas del árbol.
5. Cabe notar que la fórmula $P(X = k) = \binom{n}{k} p^n$ se aplica solamente para el caso especial de $p = q = 0{,}5$. Para el caso general, se utiliza $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Interpretan datos de un experimento aleatorio dicotómico como la base del modelo binomial.
   - Comparan la probabilidad de una variable aleatoria y la frecuencia relativa de un suceso en un experimento aleatorio.
   - Evalúan las diferentes posibilidades en un experimento aleatorio y determinan su probabilidad.
   - Elaboran diagramas de árboles para representar las probabilidades de los diferentes sucesos de un experimento.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Simulación del aparato de Galton:
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_es.html