Actividad 2: Explorar la función logaritmo y sus aplicaciones

PROPÓSITO

Los estudiantes construyen la función logaritmo matemáticamente, utilizando los exponentes como representantes de la función puntual, para luego llegar a la función mediante la completitud y continuidad. Se espera que comprendan que el aprendizaje de la matemática se desarrolla a lo largo de la vida y que es necesario aplicar conocimientos anteriores constantemente para construir el nuevo; en este caso, se trata También aplican la exponencial en modelos de crecimiento y en todo momento pueden usar herramientas digitales como apoyo.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3: Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 9 horas pedagógicas.

DESARROLLO

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

1. Comencemos a explorar a partir de la relación que existe entre el número de ceros de una potencia de 10 y el valor del exponente de dicha potencia. Por ejemplo, para $10^5 = 100\,000$, el exponente 5 coincide con el número de ceros de 100 000. Completa la siguiente tabla.

Valor	Expresado como potencia de 10	Utilizando el exponente como representante
10	10^1	1
100	10^2	
1 000	10^3	3
10 000		4
	10^5	5
1 000 000		

Tabla 1: Potencias de 10 representadas a partir de los exponentes.

a. De acuerdo con la tabla 1 y utilizando algún programa, grafica algunas potencias de 10 con su correspondiente representante, como muestra la Figura 1:

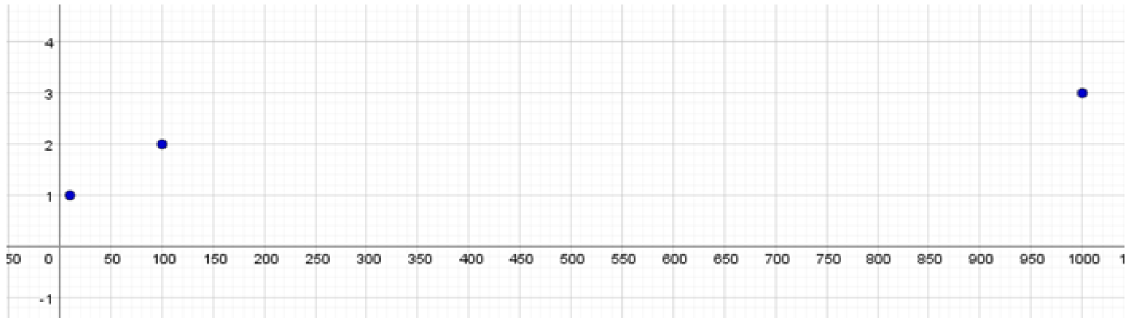

Fig. 1: Gráfico de la relación entre las potencias de 10 y sus representantes positivos.

b. De acuerdo con la Tabla 1, en vez de operar con el número 100, se considera el 2 y en vez del 10 000, se utiliza el 4. Además, multiplicar $100 \cdot 10\,000$ es equivalente a sumar el valor de los exponentes $2 + 4$, por lo que el resultado es 1 000 000, ya que el resultado de la suma es 6 y se tiene que $10^6 = 1\,000\,000$. Con esta estrategia, se puede hacer algunas multiplicaciones mentalmente.

Completa la siguiente tabla:

Operación	Resultado	Exponente como representante
$10 \cdot 10$	$10^{1+1} = 100$	1+1 = 2
$10 \cdot 10^2$	$10^{1+2} = 1\,000$	1+2 = 3
$10^2 \cdot 10^3$	$10^{2+3} = 100\,000$	2+3 = 5
	$10^{2+4} = 1\,000\,000$	
		3+5 = 8

Tabla 2: Operaciones con potencias de 10 y representantes positivos.

2. Hasta el momento se ha trabajado con exponentes positivos. Sin embargo, ¿qué sucede con las potencias de 10 cuyo exponente es nulo o negativo? ¿Es posible ampliar la tabla 1?

   a. Completa la tabla.

Valor	Expresado como potencia de 10	Representante
$\frac{1}{100\,000}$ = 0,00001	10^{-5}	-5
$\frac{1}{10\,000}$ = 0,0001	10^{-4}	-4
$\frac{1}{1\,000}$ = 0,001	10^{-3}	
$\frac{1}{100}$ = 0,01		-2
$\frac{1}{10}$ = 0,1		-1
1	10^{0}	0
	10^{1}	

Tabla 3: Potencias de 10 y sus correspondientes representantes.

   b. Grafica estos datos o inclúyelos en tu gráfico anterior.

   c. De acuerdo con la Tabla 3, Francisco explica a un compañero: “Mira, lo que se hace aquí es que, en vez de ver el número $\frac{1}{100}$ (que es lo mismo que 0,01), se considera el -2 como representante, y en vez de $\frac{1}{10\,000}$ ó 0,0001, se utiliza el -4”. ¿Qué partes de esta explicación entendiste? ¿Qué agregarías o que sacarías?

   d. Tania explica a continuación: “Además, multiplicar $0{,}01 \cdot 0{,}0001$ equivale a sumar el valor de los exponentes $-2+(-4\,)$, por lo que el resultado es $0{,}000\,001$, ya que el resultado de la suma es -6 y se tiene que $10^{-6} = 0{,}000\,001$. También se puede considerar el siguiente ejemplo, donde se realiza la adición $2+(-4) = -2$:

$$100 \cdot \frac{1}{10\,000} = 100 \cdot 0{,}0001 = 10^{2} \cdot 10^{-4} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01\text{”}$$

   ¿Estás de acuerdo con la explicación de Tania? ¿Qué cambiarías? ¿Cómo lo dirías con tus propias palabras? ¿Qué propiedades ya conocidas se está utilizando?

   e. Completa ahora la siguiente tabla:

Operación	Resultado	Exponente como representante
$10^{-1} \cdot 10^{-1}$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$	-1 + -1 = -2
$10^{-1} \cdot 10^{-2}$	$10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$	-1 + -2 = -3
$10^{-2} \cdot 10^{-3}$		-2 + -3 = -5
$10^{2} \cdot 10^{-4}$		

Tabla 4: Operaciones con potencias de 10 y representantes negativos.

3. Hasta aquí, hemos establecido una función f entre potencias de 10 y sus exponentes o representantes. Si lo llevamos a una tabla de coordenadas $(x;y)$, se puede hacer una asociación como la siguiente. Completa.

x	$y = f(x)$	$(x;y)$
0,001	-3	(0,001; -3)
0,01	-2	(0,01; -2)
0,1	-1	(0,1; -3)
1	0	(1, 0)
10	1	
100	2	
1000	3	

Tabla 5: Potencias de 10 y sus correspondientes representantes.

4. Nota que a cada potencia de 10 le corresponde un único representante. Además, se ha establecido algunas propiedades de esta función f. ¿Con cuáles de las siguientes frases estás de acuerdo?

   a. La función f relaciona a cada potencia de 10 con su exponente.

   b. La función f evaluada en 1 retorna como valor al 0, ya que $10^0 = 1$.

   c. La función f evaluada en el producto de dos o más potencias de 10 retorna como valor la adición de los exponentes de dichas potencias.

5. Hasta el momento se ha graficado solo algunos puntos. ¿Qué sucede con los demás números entre 0 y 1?, ¿entre 1 y 10 o entre 10 y 100?, etc. ¿Se puede encontrar un representante para cada uno de los números reales positivos?

6. Según lo anterior, completa la tabla 6 según las coordenadas x e y del punto a graficar:

x	$y = f(x)$	$(x;y)$
10^2	2	(100; 2)
$10^{3,5}$	3,5	(3 162; 3,5)
	0,5	(3,2; 0,5)
$10^{0.7}$		(5,01; 0,7)
	$\sqrt{2}$	

Tabla 6: Potencias de 10 y sus correspondientes representantes.

   a. ¿Se puede encontrar el valor de $y = f(x)$ a cualquier valor del eje X?

   b. ¿Estaría cubierto todo el eje X? ¿Cuál es el dominio de la función f?

7. Utiliza algún programa para graficar la función $f(x) = log(x)$ y encontrar todos los representantes involucrados. Describe esta función de forma simbólica y describe su comportamiento con tus palabras.

LOS TERREMOTOS Y LA FUNCIÓN LOGARITMO

Conexión disciplinar:
Ciencias para la Ciudadanía.
OA f, 3° y 4° medio

1. Lee junto a un compañero la siguiente información: "Es común escuchar en televisión y en la prensa en general que, al referirse a un sismo o terremoto, se señala su magnitud en función de la escala de Richter; sin embargo, esa escala –creada en 1935 por el sismólogo estadounidense Charles Francis Richter (1900-1985)– se actualizó en la década del 70 con la Escala de Magnitud de Momento. Los valores de ambas escalas son coincidentes hasta los sismos de magnitud 6,9; sobre esa magnitud, la relación varía. Así, el terremoto del 27 de febrero de 2010 en Santiago de Chile, de magnitud 8,8, está medido en la Escala de Magnitud de Momento".
   a. ¿Qué información te entrega el párrafo?
   b. ¿Habías escuchado algo así anteriormente? Comparte tus experiencias sobre este tema con tus compañeros.
   c. ¿Cómo crees que se puede entregar datos sobre la magnitud de un terremoto? Comenta con tus compañeros.

2. Lee la siguiente información con un compañero: "El modelo que permite realizar esta asignación numérica es la siguiente:

$$M_w = \frac{2}{3} log(M_0) - 10{,}7$$

   donde M_w es la magnitud de momento sísmico, cuya particularidad es que carece de dimensión física asociada y de unidad de medida explícita; se conoce como magnitud adimensional. Por otra parte, M_0 corresponde al momento sísmico. El momento sísmico es una cantidad que usan los sismólogos para medir el tamaño de un terremoto. Se trata de un momento de fuerza que se determina en función de las características geológicas del terremoto, como la falla que lo provocó y el desplazamiento de las placas. Este momento sísmico se mide en dyna por centímetro ($dyna \cdot cm$). Como los valores del momento sísmico son muy grandes, una escala logarítmica con base 10 permite trabajar con ellos en un rango más manejable".
   a. ¿Qué información nueva te entrega este párrafo?
   b. Identifica y anota las partes del modelo en tu cuaderno, y haz flechas para indicar los nombres de cada elemento.
   c. Si recuerdas algunos datos de tus experiencias, ingrésalas al modelo y comparte tu procedimiento con tu compañero de mesa.

3. Respecto del terremoto del 27 de febrero de 2010 en Santiago de Chile y usando el modelo anterior, ¿cuál sería el momento sísmico M_oo el momento de fuerza de ese terremoto? Explica cómo lo obtuviste, considerando que $M_w = 8{,}8$.

4. Utiliza la magnitud de los terremotos de la siguiente tabla para relacionar la función exponencial y logarítmica. A partir de la fórmula de la Escala de Magnitud de Momento, completa la tabla para identificar los valores del momento sísmico en cada uno de los terremotos dados.

Lugar	Año	Magnitud	Momento Sísmico ($dyna \cdot cm$)
Valdivia	1960	9,5	
Constitución	2010		$10^{29,25}$
Tarapacá	1877	8,3	
Arica e Iquique	2014	8,2	
Quellón	2016		$10^{27,45}$
Iquique	2009	6,5	
Santiago	2016	5,4	
Los Vilos	2017		$10^{22,35}$

Tabla 7: Sismos de diferentes magnitudes ocurridos en Chile.

5. Usa algún programa digital para generar una representación visual de la magnitud de los terremotos de la lista según la fuerza involucrada en cada uno de ellos. ¿Cómo es la gráfica?
6. Al utilizar sólo los exponentes de las potencias de 10, la relación ¿será lineal? Explica tu respuesta con un gráfico.

EXPLORACIÓN DE UN MODELO LOGARÍTMICO

1. Según Gutenberg y Richter (1956)[6], la relación entre la magnitud de las ondas superficiales (M) y la energía liberada (E, en ergios) está dada por:

$$M(E) = \frac{log(E) - 11{,}8}{1{,}5}$$

Conexión disciplinar:

Ciencias para la Ciudadanía.

OA f, 3° y 4° medio

   a. ¿Cuál es el intervalo de la función $M(E)$ para el cual hace sentido esta situación?

   b. ¿Cuál es la magnitud de sismos que han liberado unos $6{,}309573445 \cdot 10^{17}$ergios y $1{,}995262315 \cdot 10^{19}$ ergios respectivamente?

[6]https://www.curriculumnacional.cl/link/http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/Energ%C3%ADa%20del%20terremoto.pdf

c. Acorde a lo anterior, completa la siguiente tabla:

Magnitud	Energía (Ergio)
8,5	
8	
7,5	
7,0	
6,5	$3{,}6 \cdot 10^{21}$
	$8{,}9 \cdot 10^{20}$
	$6{,}3 \cdot 10^{20}$
	$1{,}1 \cdot 10^{20}$
	$2{,}0 \cdot 10^{19}$
	$6{,}3 \cdot 10^{17}$

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Proponga a los alumnos que construyan tablas de representaciones para las potencias de 10, sin hacer referencia a logaritmo, sino comenzando por la relación conocida entre el exponente y el número de ceros. A partir del gráfico de los puntos de cada potencia de 10 con sus representantes, formule preguntas sobre los valores entre 0 y 1, 1 y 10, 10 y 100, respectivamente. ¿Es posible determinar representantes para esos valores? Este punto es trascendental, ya que los invita a ir más allá de la noción de potencia como multiplicación iterada.
2. Para los demás casos, se busca que noten que la línea que trazaron uniendo los puntos del gráfico es un posible representante para valores. Por ejemplo, observando el gráfico, un posible representante para el 5 puede ser 0,7, por lo que se esperaría que $10^{0,7} \approx 5$. Este es un buen ejemplo para que ver que la curva no es proporcional; es decir, no se trata de segmentos de recta que unen cada punto. De los resultados obtenidos, se puede derivar otros representantes; por ejemplo: $50 = 10 \cdot 5 \approx 10^1 \cdot 10^{0,7} = 10^{1,7}$. A partir de esto, puede proponerles que estimen representantes para números como 500, 25, 30, y que los verifiquen calculando la potencia correspondiente.
3. Respecto de la actividad relacionada con los sismos, es importante que manejen adecuadamente la expresión $M_w = \frac{2}{3} log(M_0) - 10{,}7$ y sean capaces de despejar el momento sísmico como $M_0 = 10^{1{,}5(Mw+10{,}7)}$
4. Esa actividad permite contextualizar la función logarítmica mediante un modelo que relaciona la magnitud del sismo (M_w) con el momento sísmico (M_0), que se mide en la unidad de dyna por centímetro. El trabajo propuesto se vincula con obtener M_0 o M_w, dependiendo de la situación.
5. Es importante que dimensionen qué significa la variación de un grado a otro en un sismo; lo pueden visualizar en la variación del exponente del momento sísmico.

6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan modelos de situaciones de crecimiento y decrecimiento que involucran las funciones exponencial y logarítmica.
   - Construyen modelos de situaciones de crecimiento y decrecimiento que involucran las funciones exponencial y logarítmica.
   - Identifican los intervalos donde el modelo exponencial o logarítmico tiene sentido, según la situación de crecimiento o decrecimiento.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Momento sísmico
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://en.wikipedia.org/wiki/Seismic_moment
- Escala sismológica de magnitud de momento
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_sismol%C3%B3gica_de_magnitud_de_momento
- Escala sismológica de Richter
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_sismol%C3%B3gica_de_Richter
- Los terremotos más fuertes en la historia de Chile: Centro sismológico de la Universidad de Chile
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sismologia.cl/
- Las escalas logarítmicas, la escala de Richter y la escala de magnitud de momento
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.ehu.eus/ehusfera/epdzabaldu/2014/04/04/las-escalas-logaritmicas-y-la-escala-richter/