Matemáticas

1° Medio

Unidad 1

OA 3

Productos de binomios

GUÍA DEL ESTUDIANTE

Productos de binomios a sumas algebraicas

Palabras clave

Factores, monomio por binomio, binomio por binomio, productos de binomios, multiplicación de binomios , distributividad, representación gráfica, arreglos rectangulares, términos semejantes.

Preguntas de inicio

- ¿Cómo representar gráficamente el producto de dos factores?
- ¿Qué son y cómo se expresan monomios, binomios y polinomios en álgebra?
- ¿Cómo se multiplica un monomio por un polinomio?
- ¿Cómo se multiplica dos binomios?

Presentación

En esta oportunidad utilizaremos arreglos rectangulares, como los que se forman con baldosas, ladrillos o mosaicos, para estudiar las propiedades de productos algebraicos.

En el ***Juego de los Factores***, “x^2” se representa mediante un cuadrado grande, 

, “x”, mediante un rectángulo 

, la unidad mediante un cuadrado pequeño, 

.

Se utiliza el color rojo para los valores positivos y el color azul para los negativos, como en la figura siguiente:

Abre el software ***Juego de los Factores*** – ***producto - estudiante***. Debieses ver una imagen como la siguiente:

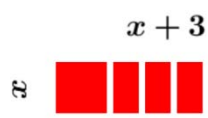
¡Comencemos!

Para transformar productos de binomios en sumas algebraicas, usaremos el ***Juego de los Factores*** y luego la distribución algebraica (.

Caso 1: Monomio por binomio, ambos con términos positivos.

Multiplicar $x(x+3)$:

Usando el ***Juego de los Factores***, construye el arreglo de bloques que representa $x(x+3)$. Como en la figura.



¿Cuántos bloques de cada tipo usaste?

Tipo de bloque	Cantidad de bloques
	1
	3

¿Cuál es la expresión algebraica que representa:  ?

Una "x^2" seguida de tres "x", o sea: $x^2 + 3x$.

Aplicando la distributividad, al multiplicar $x(x+3)$, x multiplica a cada término del binomio $(x+3)$.

$$x(x+3) = x \cdot x + x \cdot 3$$
$$= x^2 + 3x$$

Observa que el resultado obtenido a través de los bloques es el mismo que el que se obtiene al aplicar la distributividad: $x^2 + 3x$

Ejercitación

1. Usando el juego de los factores, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

   a) $x(x+2)$
   b) $x(x+5)$
   c) $x(x+9)$
   d) $x(x+10) = x^2 + 10x$

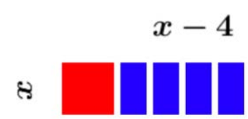
2. Usando la distribución algebraica, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

   a) $x(x+18)$
   b) $x(x+23)$
   c) $x(x+98)$
   d) $x(x+153)$

Caso 2: Monomio por binomio con términos negativos.

Multiplicar $x(x-4)$:

Usando el ***Juego de los factores*** construye el arreglo de bloques que representa a $x(x-4)$.



¿Cuántos bloques de cada tipo usaste?

Tipo de bloque	Cantidad de bloques
	1
	4

¿Cuál es la expresión algebraica?

$$x^2 - 4x$$

Ahora, usando la distributividad multiplica $x(x-4)$. Para eso se distribuye el término x sobre los términos del binomio.

$$\begin{aligned} x(x-4) &= x \cdot x - x \cdot 4 \\ &= x^2 - 4x \end{aligned}$$

Nuevamente, el resultado que se obtiene usando los bloques es el mismo que se obtiene al aplicar la regla distributiva.

Ejercitación

1. Usando el juego de los factores, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

a) $x(x-4)$
b) $x(x-7)$
c) $x(x-9)$
d) $x(x-10)$

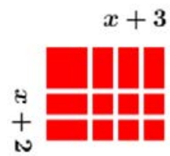
2. Usando la distribución algebraica, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

a) $x(x-16)$
b) $x(x-22)$
c) $x(x-30)$
d) $x(x+85)$

Caso 3: Binomio por binomio con términos positivos.

Multiplicar $(x+2)(x+3)$, usa el **Juego de los Factores**.

Usando el applet ***Juego de los factores*** construye el arreglo de bloques que representa a $(x+2)(x+3)$.

Gráfica creada con el J***uego de los Factores.***	
Número de bloques que constituyen el arreglo:	1 de , 5 de  y 6 de 
La expresión algebraica, contando un bloque grande, 5 bloques rectangulares rojos y 6 cuadrados pequeños es:	$x^2 + x + 6$

Usando la distribución algebraica:

Para multiplicar $(x+2)(x+3)$, distribuye el término $(x+2)$ multiplicando a los sumandos del segundo paréntesis:

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= (x+2)\cdot x + (x+2)\cdot 3\\ &= x\cdot x + 2\cdot x + x\cdot 3 + 2\cdot 3\\ &= x^2 + 2x + 3x + 6\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

Nuevamente se obtiene lo mismo usando los bloques que usando la distributividad.

Ejercitación

1. Usando el ***Juego de los Factores***, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

a) $(x+2)(x+5)$
b) $(x+4)(x+6)$
c) $(x+6)(x+7)$
d) $(x+8)(x+9)$

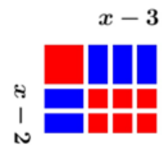
2. Usando la distribución algebraica, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

a) $(x+10)(x-16)$
b) $(x+12)(x-22)$
c) $(x+15)(x-30)$
d) $(x+20)(x+85)$

Caso 4: Binomio por binomio, ambos con términos negativos.

Multiplicar $(x-2)(x-3)$

Usando el applet ***Juego de los factores*** construye el arreglo de bloques que representa a $(x-2)(x-3)$.

Gráfica creada con el J***uego de los Factores.***	
Número de bloques que constituyen el arreglo:	1 de  , 5 de  y 6 de 
La expresión algebraica, contando un bloque grande, 5 bloques rectangulares azules y 6 cuadrados pequeños es:	x^2-5x+6

Usando la distribución algebraica, se distribuye el paréntesis $(x-2)$ sobre cada término del segundo paréntesis.

$$\begin{aligned}(x-2)(x-3) &= (x-2)\cdot x+(x-2)\cdot -3\\ &= x\cdot x-2\cdot x+x\cdot -3-2\cdot -3\\ &= x^2-2x-3x+6\\ &= x^2-\ 5x+6\end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos los mismos resultados, sea contando los bloques, o sea aplicando la distributividad.

Ejercitación

1. Usando el ***Juego de los Factores***, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

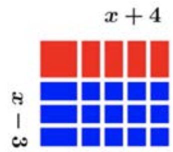
   a) $(x-4)(x-1)$
   b) $(x-5)(x-7)$
   c) $(x-7)(x-8)$
   d) $(x-9)(x-10)$

2. Usando la distribución algebraica, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

   a) $(x-11)(x-16)$
   b) $(x-12)(x-22)$
   c) $(x-15)(x-30)$
   d) $(x-20)(x-85)$

Caso 5: Binomio por binomio, uno de ellos con términos negativos.

Multiplicar $(x+4)(x-3)$.

Gráfica creada con el J***uego de los Factores.***	
Número de bloques que constituyen el arreglo:	1 de , 3 de , 4 de  y 12 de 
Reducir términos semejantes:	3  se cancelan con 3 , quedando 1  
La expresión algebraica, contando un bloque grande, 1 bloque rectangular rojo y 6 cuadrados pequeños es:	x^2+x-12

Usando la distribución algebraica para multiplicar $(x+4)(x-3)$, distribuye el término $(x+4)$ sobre los términos de $(x-3)$:

$$\begin{aligned}(x+4)(x-3) &= (x+4)\cdot x+(x+4)\cdot -3\\ &= x\cdot x+4\cdot x+x\cdot -3+4\cdot -3\\ &= x^2+4x-3x-12\\ &= x^2+\ (\cancel{x}+\cancel{x}+\cancel{x}+x)+(-\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{x})-12\\ &= x^2+x-12\end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos el mismo resultado contando bloques o usando las reglas del algebra.

Ejercitación

1. Usando el juego de los factores, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

   a) $(x+2)(x-1)$
   b) $(x+4)(x-7)$
   c) $(x-7)(x+9)$
   d) $(x-6)(x+10)$

2. Usando la distribución algebraica, determina los resultados de las siguientes multiplicaciones:

   a) $(x+10)(x-16)$
   b) $(x+12)(x-22)$
   c) $(x+15)(x-35)$
   d) $(x-20)(x+65)$

Para cerrar

¿Qué hemos aprendido?

Usando el ***Juego de los factores*** para representar productos algebraicos, aprendimos acerca del producto entre monomios y binomios. La regla que rige estas operaciones es la distributividad. Aplicando esta regla se puede "*deshacer*" o "*sacar*" los paréntesis transformando el producto en una suma de términos.

¿Podrías responder las preguntas con que iniciamos esta guía?

Expresiones como x, x^2, $3a$, -4, 0, $5ab$, se llaman "Monomios" o "Términos" de una expresión algebraica. Dos monomios (o términos) unidas por los signos de suma o de resta, forman un "Binomio". Los "Polinomios" tienen varios términos.

El resultado del producto entre un monomio y un binomio, se obtiene mediante la "distributividad" de la multiplicación sobre la adición, como en $x(x-11) = x \cdot x - 11 \cdot x = x^2 - 11x$. El producto de dos binomios genera cuatro términos que se reducen a tres una vez aplicada la reducción de términos semejantes.

Casos como el de un binomio multiplicado por sí mismo, el "Cuadrado del binomio" o una suma multiplicada por su diferencia, entre otras, se llaman **"productos notables"** debido a que el conocer su desarrollo ayuda en muchas situaciones en que se usa el álgebra.

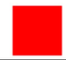
¿Podrías representar el cuadrado del binomio: $(2x+3)^2$?

¡Hasta la próxima!

ANEXO: Reglas del juego de los factores

El objetivo del juego de los factores es relacionar el desarrollo de expresiones algebraicas con rectángulos que se pueden formar con el arreglo. Las reglas del juego se resuman a continuación.

1. El arreglo puede estar constituido por algunas de las siguientes piezas:

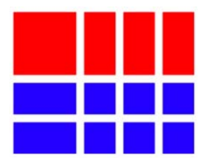
Un cuadrado grande rojo de lado x	
Rectángulos azules y rojos de largo x y ancho 1	
Cuadrados pequeños azules y rojos de lado 1	

Nota: Que el lado sea x significa que corresponde a un número cualquiera, es decir, el lado representa una cantidad variable.

2. En el arreglo existen piezas rojas y azules. Para efectos del juego, las rojas se considerarán "positivas" y las azules se considerarán "negativas".

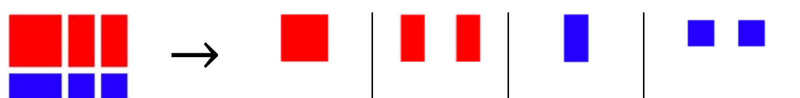
3. Armar el arreglo consiste en disponer las piezas de modo de formar un rectángulo utilizando algunas de los tres tipos de piezas, según los requerimientos.

   Por ejemplo, si se requiere armar un rectángulo cuyos lados son $(x+3)y(x-2)$ respectivamente, la solución es la figura adjunta. El rectángulo así formado, representa a la expresión x^2+x-6.



4. Desarmar el arreglo consiste en separar las piezas del rectángulo ya formado, según los tipos de piezas (cuadrado rojo grande, rectángulos rojos, rectángulos azules y cuadrados pequeños). Por ejemplo, si se desarma el rectángulo que representa a $(x+2)(x-1)$, las piezas que lo constituyentes son:

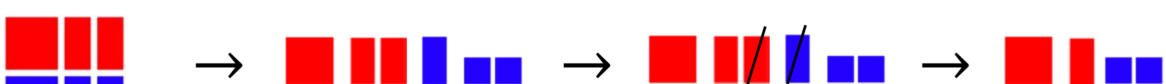
$(x+2)(x-1)$ $\longrightarrow$



x^2	$x+x$	$-x$	${}^{-}1+{}^{-}1$

   Al desarmar el arreglo, se pueden "eliminar" rectángulos de distinto color. En este ejemplo, uno de los dos rectángulos rojos se elimina con un rectángulo azul:

   Entonces, como $(x+2)(x-1)$ es igual $x^2+2x-x-2$, al reducir términos semejantes, se tiene que:



$(x+2)(x-1)$ $\quad\longrightarrow\quad$ $x^2+2x-x-2$ $\quad\longrightarrow\quad$ $x^2+x+\cancel{x}-\cancel{x}-2$ $\quad\longrightarrow\quad$ x^2+x-2

$$(x+2)(x-1)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$$

   "Desarmar el arreglo y contabilizar sus piezas" constituyentes se corresponde con el proceso de "desarrollar" el producto de expresiones algebraicas.